

MVE036, VT-19: FÖRELÄSNING 4

4. GAUSS OCH STOKES SATSER

4.1. **Dirac- δ i $\mathbb{R}^n$.** Det finns två naturliga sätt att definiera Dirac- δ i flera dimensioner, genom att generalisera (3.11), alternativt (3.34). I tur och ordning:

Definition 4.1. *Dirac- δ distributionen* i $\mathbb{R}^n$ är den linjära avbildningen $\delta^n : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ som ges av

$$(4.1) \quad \delta^n(\phi) = \phi(\mathbf{0}) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Här betecknar $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vektorrummet av alla oändligt differentierbara funktioner $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ som har kompakt stöd. Vi vet från flervariabelanalysen vad detta betyder.

Definition 4.2. Låt $\mathcal{F}_0^n$ bestå av alla delmängder till $\mathbb{R}^n$ som kan skrivas som en ändlig union av n -dimensionella bollar, där med "boll" tillåter man både öppna och slutna, samt både ändliga och oändliga sådana. *Dirac- δ måttet* i $\mathbb{R}^n$ är den sannolikhetsfördelning $\delta^n : \mathcal{F}_0^n \rightarrow [0, 1]$ som ges av

$$(4.2) \quad \delta^n(A) = \begin{cases} 1, & \text{om } \mathbf{0} \in A, \\ 0, & \text{om } \mathbf{0} \notin A. \end{cases}$$

Precis som i en dimension är det nog konceptuellt lättare att arbeta med den andra definitionen. I synnerhet ser man direkt att det flerdimensionella måttet är ett s.k. *produktmått*, dvs

$$(4.3) \quad \delta^n \left(\prod_{i=1}^n A_i \right) = \prod_{i=1}^n \delta(A_i),$$

då $A_1, \dots, A_n$ är delmängder till $\mathbb{R}$, δ är det endimensionella Dirac-måttet och $\prod$ syftar på en Cartesisk produkt av mängder. Det finns en analog till (4.3) för distributioner om man är beredd för lite mer AON. Målet är att kunna make:a sense av den naturliga generaliseringen av (3.26). För en integrerbar funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ skulle vi vilja ha

$$(4.4) \quad f(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \delta^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Det kan vi få genom att tänka oss att

$$(4.5) \quad d\mathbf{x} = \prod_{i=1}^n dx_i, \quad \delta^n(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \delta(x_i),$$

och använda Fubini. Jag nöjer mig med att illustrera ideen för $n = 2$:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \delta^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta^2(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x) \delta(y) dx dy = \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x) dx \stackrel{(3.26)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy f(0, y) \stackrel{(3.26)}{=} f(0, 0), \quad \text{v.s.v.} \end{aligned}$$

Man kan ge en rigorös tolkning av dessa uträkningar genom en generalisering till $\mathbb{R}^n$ av vårt argument för att komma fram till (3.40). På det sättet får man ett starkare resultat än (4.4), nämligen att för ett godtyckligt kvadrerbart område $K \subseteq \mathbb{R}^n$ och en godtycklig Riemannintegrerbar f gäller

$$(4.6) \quad \int_K f(\mathbf{x}) \delta^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \begin{cases} f(\mathbf{0}), & \text{om } \mathbf{0} \in K, \\ 0, & \text{om } \mathbf{0} \notin K. \end{cases}$$

Detaljerna lämnas som en övning till den intresserade läsaren.

4.2. Gauss sats för en punktladdning, dvs ett singulärt elektriskt fält. Maxwells första ekvation lyder

$$(4.7) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Detta förutsätter att laddningsdensiteten ρ är en kontinuerlig funktion av n variabler och således att det elektriska fältet $\mathbf{E}$ är C^1 . I så fall härleds (4.7) från Gauss lag och Gauss sats. Gauss lag lyder så här (tagen från Wikipedia):

“The total electric flux through a closed surface equals $1/\varepsilon$ times the net electric charge within the closed surface”.

Uttryckt matematiskt säger detta att, om K är en innesluten kropp i $\mathbb{R}^3$ så gäller:

$$(4.8) \quad \oint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_K \rho dV.$$

Men Gauss sats säger att

$$(4.9) \quad \oint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{E} dV$$

och därav följer (4.7).

Vi vill utvidga analysen till det singulära fältet som produceras av en punktladdning Q . Vi måste först kontrollera att Gauss lag, vars formulering ovan make:ar sense även om laddningarna inte är kontinuerligt utsmetade, fortsätter att gälla. Lagen skulle för en punktladdning Q i origo hävda att

$$(4.10) \quad \oint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \begin{cases} \frac{Q}{\varepsilon}, & \text{om } \mathbf{0} \in K, \\ 0, & \text{om } \mathbf{0} \notin K. \end{cases}$$

Enligt Coulombs lag så ges fältet från punktladdningen av

$$(4.11) \quad \mathbf{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{\hat{r}}{r^2}, & \text{då } \vec{r} \neq \vec{0}, \\ \text{odefinierat}, & \text{då } \vec{r} = \vec{0}. \end{cases}$$

För en sfär S kring origo av godtycklig nollskild radie, ty $\hat{\mathbf{N}} = \hat{r}$ på sfären så visar man lätt att

$$(4.12) \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \frac{Q}{\varepsilon}.$$

Så (4.10) gäller för sfärer kring punktladdningen. Dessutom kan man lätt kontrollera att

$$(4.13) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \text{då } \vec{r} \neq \vec{0}.$$

Det är en enkel beräkning redan i Cartesiska koordinater, men ännu enklare i sfäriska koordinater, ty i så fall är $\mathbf{E} = (E_r, 0, 0)$, $E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$ och vi kan använda ekv. (2.14).

Eftersom $\mathbf{E}$ är C^1 utanför origo så kan Gauss sats fortfarande tillämpas där, så vi kan härleda från (4.13) att $\oint_Y \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = 0$ för varje sluten C^1 -yta Y som inte innesluter origo. Så (4.10) gäller även för sådana ytor. Men då gäller det för alla C^1 -ytor, ty om en sådan yta innesluter origo kan den delas upp i en sfär kring origo och en eller fler ytor som inte innesluter origo.

Nu när vi har bevisat (4.10) återstår frågan om vi kan make:a sense av $\nabla \cdot \mathbf{E}$ i hela $\mathbb{R}^3$ så att (4.9) fortsätter att gälla. Vår definition måste vara konsekvent med (4.13). Från (4.6) ser vi direkt vad som funkar, nämligen

$$(4.14) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \delta^3(\vec{r}).$$

M.a.o. vi måste betrakta $\mathbf{E}$ som en distribution. Precis som i en dimension kan man definiera en *partiell derivata* av en distribution och därmed distributionens *divergens*. Så (4.14) har en rigorös

tolkning. Det är den eftersökte utvidgningen av Maxwells första ekvation till det singulära fältet som produceras av en punktladdning.

4.3. Stokes sats för ett singulärt magnetfält. Det experimentellt grundade Biot-Savart lagen säger att det magnetiska fältet $\mathbf{B}$ som produceras av en konstant ström I i positiv riktning i en oändlig tunn ledare längs z -axeln ges av

$$(4.15) \quad \mathbf{B}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\mu I}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right), & \text{då } (x, y) \neq (0, 0), \\ \text{odefinierat,} & \text{då } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Som vi har sett i flervariabelanalysen så gäller för ett godtyckligt kvadrerbart område D i xy -planet med en styckvis- C^1 , positivt orienterad rand ∂D , att

$$(4.16) \quad \oint_{\partial D} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \begin{cases} \mu I, & \text{om } (0, 0) \in D, \\ 0, & \text{om } (0, 0) \notin D. \end{cases}$$

Om i stället strömmen var kontinuerligt utsmetad så skulle vi kunna tala om en *strömningsdensitet* $\mathbf{J}$ och skriva

$$(4.17) \quad I = \iint_D \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS,$$

ty $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$ för en yta D i xy -planet. I så fall skulle fältet $\mathbf{B}$ inte heller vara singulärt, så vi skulle kunna använda Stokes sats för att skriva om VL av (4.16) till

$$(4.18) \quad \oint_{\partial D} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Från (4.16), (4.17) och (4.18) härleds Ampères lag:

$$(4.19) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}.$$

Vi vill utvidga lagen till det singulära fältet (4.15). Först måste man kontrollera i så fall att $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ utanför z -axeln. Detta är en enkel beräkning redan i Cartesiska koordinater, men ännu enklare i cylindriska koordinater, med hjälp av (2.38), ty

$$(4.20) \quad \mathbf{B}(r, \theta, z) = \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{\theta}.$$

Sedan är det klart från (4.16), (4.18) och (4.6) att vi borde skriva

$$(4.21) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu I \cdot \delta^2(\vec{r}) \mathbf{k}.$$

M.a.o. vi betraktar $\mathbf{B}$ som en distribution och således även dess curl som sådan. Detta är den eftersökte utvidgningen av Ampères lag till det singulära magnetfältet som produceras av en ström i en oändlig tunn ledare.