MVE036, VT-19: FÖRELÄSNING 5

5. Maxwells Ekvationer och Elektromagnetiska Vågor

5.1. **Maxwells ekvationer.** Vi har i Föreläsning #4 redan härlett den första Maxwell ekvationen (4.7). Maxwells andra ekvation är likartad:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{5.1}$$

Den säger att det magnetiska fältet är källfritt. Detta motiveras fysikaliskt. Ett sätt att se på det är att magnetism produceras endast av laddningar i rörelse. Fysiker brukar uttrycka det som att "det finns inga magnetiska monopoler".

Så grundprincipen är att elektricitet produceras av stationära laddningar medan magnetism produceras av laddningar i rörelse. Samtidigt säger Newtons första lag att om två observatörer rör sig med konstant hastighet relativt varandra så upplever de exakt samma krafter och därmed beskriver exakt samma fysikaliska lagar. Detta kan inte gå ihop om elektricitet och magnetism är "oberoende fenomen". Det var först Faraday som preciserade hur dessa två fenomen hänger ihop. Hans experimentellt grundade lag lyder så här (tagen från Wikipedia):

"The induced electromotive force in any closed circuit is equal to the negative of the time rate of change of the magnetic flux enclosed by the circuit."

Matematiskt säger detta att för en enkel sluten kurva γ i planet gäller

$$\oint_\gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_D \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{N}}\, dS, \tag{5.2}$$

där D är området i planet som innesluts av γ och $\hat{\boldsymbol{N}}$ är en enhetsnormal som gör att γ är positivt orienterad. I HL av (5.2) kan vi derivera under integraltecknet[1] och skriva

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_D \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{N}}\, dS = \iint_D \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \hat{\boldsymbol{N}}\, dS. \tag{5.3}$$

Till VL av (5.2) däremot kan vi tillämpa Stokes sats och skriva

$$\oint_\gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \hat{\boldsymbol{N}}\, dS. \tag{5.4}$$

Eftersom γ är godtycklig så måste det gälla att

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{5.5}$$

vilket är Maxwells tredje ekvation.

Ens första gissning för Maxwells fjärde ekvation skulle vara Ampères lag (4.19). Det visar sig dock att detta är ej konsekvent med Maxwells tre första ekvationer - intuitivt så är det för att det inte tar hänsyn till det omvända fenomenet till Faradays lag, nämligen att ett tidsvarierande elektriskt fält borde ge upphov till ett magnetfält. Det visar sig behövas en korrigeringsterm i (4.19), och Maxwells fjärde ekvation lyder[2]

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{5.6}$$

[1] Läs Avsnitt 5.1 av PB för en rigorös justifiering av derivering under integraltecknet.

[2] Läs Avsnitt 10.6 i PB för en förklaring av korrigeringen.

5.2. **Elektromagnetiska vågor.** För att lösa Maxwells ekvationer i en verklig situation, så antar man att alla laddningar och strömmar är kända, och därmed både skalärfältet ρ och vektorfältet $\boldsymbol{J}$, samt mediets magnetiska och elektriska permeabilitet. Därmed har man fyra ekvationer för de obekanta vektorfälten $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$. Här finns det egentligen sex obekanta, nämligen dessa fälts komponenter, och åtta ekvationer om man betraktar (5.5) och (5.6) komponentvis. Rigorös analys av Maxwells ekvationer är i allmänhet svårt och kompliceras ytterligare om mediet är heterogent, dvs om μ och ε inte kan betraktas som konstanter. Man brukar ta till numeriska metoder.

Vi kan dock få en mycket viktig teoretisk insikt från det enklaste fallet, nämligen i ett vakuum. Det är känt från experiment att elektriska och magnetiska krafter kan propagera i vakuum så detta är fysikaliskt meningsfullt. I ett vakuum finns inget material alls så $\rho \equiv 0$ och $\boldsymbol{J} \equiv \boldsymbol{0}$. De magnetiska och elektriska permeabiliteterna kan mätas experimentellt och ges i SI-enheter av

$$\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}, \quad \varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}. \tag{5.7}$$

Maxwells ekvationer i ett vakuum lyder alltså

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \tag{5.8}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{5.9}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{5.10}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{5.11}$$

Lemma 5.1. *Om $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är ett C^2-vektorfält så gäller:*

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}. \tag{5.12}$$

Bevis: Båda leden av (5.12) är a priori vektorfält i $\mathbb{R}^3$ så det räcker att visa likhet i varje komponent. Vi ger beviset för den första komponenten, övriga komponentet behandlas likadant. Betrakta först VL. Per definition av curl så är

$$\begin{aligned}
[\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F})]_1 &= \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \times \boldsymbol{F})_3 - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \times \boldsymbol{F})_2 = \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) = \\
&= \frac{\partial^2 F_2}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z\, \partial x}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

På samma sätt använder vi definitionerna av grad och div för att utveckla HL:

$$\begin{aligned}
[\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}]_1 &= \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 F_1 = \\
= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) &- \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) F_1 = \\
&\overset{(F_1)_{xx}\text{ kanc.}}{=} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Eftersom $\boldsymbol{F} \in C^2$ så gäller Clairauts sats och därmed ser vi direkt att (5.13) och (5.14) är lika. ■

Antag nu att våra vakuumfält är åtminstone C^2 och betrakta $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E})$. Å ena sidan har vi

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) \overset{(5.12)}{=} \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} \overset{(5.8)}{=} -\nabla^2 \boldsymbol{E}. \tag{5.15}$$

Å andra sidan har vi

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) \overset{(5.10)}{=} \nabla \times \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) =$$

$$\overset{\text{Clairaut}}{=} -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \overset{(5.11)}{=} -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \tag{5.16}$$

Från (5.15) och (5.16) har vi

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}, \quad \text{där } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}. \tag{5.17}$$

Så vad är detta för något ? Om vi hade bara en rumsdimension skulle vi ha den endimensionella vågekvationen $\frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2}$, som vi studerade i Avsnitt 2.5 av PB. Kom ihåg att den allmänna lösningen var en superposition av höger- och vänstergående vågor med fart c.

På samma sätt är (5.17) en tre-dimensionell vågekvation och dess allmän lösning är en superposition av vågor[3] med fart $c \approx 2.998 \times 10^8$ m s^{-1}. Lösningarna kallas för *elektromagnetiska vågor.*

Maxwell förmodade 1865 att ljus bestod av elektromagnetiska vågor, vilket bekräftades de kommande decennierna av successsivt bättre mätningar av ljusets hastighet. Det mest explosiva med härledningen ovan dock är vad det innebär för Newtons mekanik. Enligt Newtons första lag måste en Observatör 1 som rör sig med konstant hastighet relativt en Obervatör 2 uppleva exakt samma krafter och därmed beskriva universumet med exakta samma fysikaliska lagar. I synnerhet skulle de två obervatörerna skriva ner exakt samma Maxwells ekvationer. Men då skulle de härleda exakt samma fart c för ljus. Men detta går inte ihop - om Observatör 1 rör sig jämfört med Observatör 2, hur kan de mäta samma fart ? Det går alltså inte att förena Newtons lagar med Maxwells ekvationer. Det dröjde till 1905 innan en vettig teori formulerades för att ersätta den Newtonska mekaniken. The rest is history ...

[3] Detta må bevisas i en kurs om PDE.