MVE036, VT-19: FÖRELÄSNINGAR 1 OCH 2

1. Kroklinjiga Koordinater

Vi arbetar hela tiden (för enkelhets skull) i $\mathbb{R}^3$. Vi tänker oss att det finns i bakgrunden ett fixt, underliggande Cartesiskt koordinatsystem (x, y, z), och är intresserade av koordinatbyten

$$(x, y, z) \leftrightarrow (u_1,\, u_2,\, u_3). \tag{1.1}$$

Vi förutsätter hela tiden att funktionerna $u_i = u_i(x, y, z)$ är minst C^2. Från flervariabelanalysen vet vi att, så länge

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1,\, u_2,\, u_3)} \right| \neq 0$$

i en punkt $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$, så gäller:

(a) Koordinatbytet (1.1) är giltigt åtminstone i en omgivning av $\boldsymbol{a}$, enligt Inversa Funktionssatsen,
(b) Vektorerna $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}$, beräknade i $\boldsymbol{a}$, där $\boldsymbol{r}$ är ortsvektorn (med avseende på ett för alltid fixt val av origo), är linjärt oberoende, ty dessa vektorer utgör kolumnerna i den inverterbara matrisen $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}|_{\boldsymbol{a}}$.

Observation (b) motiverar följande. Sätt

$$h_i = \left|\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \right|\right|, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

och

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.3}$$

Så i varje punkt, vektorerna $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ är linjärt oberoende enhetsvektorer. Notera att de varierar från punkt till punkt i allmänhet - enda gången så inte är fallet är om de u_i är linjära funktioner av x, y, z.

Definition 1.1. Koordinatsystemet $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ sägs vara ett *ortonormerat högersystem (ONHS)* om

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2. \tag{1.4}$$

Notera att detta medför att 3×3-matrisen $[\boldsymbol{e}_1\; \boldsymbol{e}_2\; \boldsymbol{e}_3]$ har determinant $+1$.

Vi förutsätter framöver att alla våra koordinatsystem är ONHS.

Exempel 1. Om $(u_1,\, u_2,\, u_3) = (x, y, z)$, dvs om vi inte byter koordinatsystem alls, så innebär det att $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ och $(\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{i},\, \boldsymbol{j},\, \boldsymbol{k})$.

Exempel 2. Cylindriska koordinater $(r,\, \theta,\, z)$. Vi har

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z. \tag{1.5}$$

Således är

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = (\cos\theta,\, \sin\theta,\, 0), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta,\, r\cos\theta,\, 0), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = (0,\, 0,\, 1),$$

$$h_r = \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\right|\right| = 1, \quad h_\theta = \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right|\right| = r, \quad h_z = \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\right|\right| = 1,$$

$$\boldsymbol{e}_1 := \hat{r} = (\cos\theta,\, \sin\theta,\, 0), \quad \boldsymbol{e}_2 := \hat{\theta} = (-\sin\theta,\, \cos\theta,\, 0), \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k} = (0,0,1).$$

Man kan kolla direkt att $(\hat{r},\, \hat{\theta}, \boldsymbol{k})$ är ett ONHS. Se också Figur 1.1.

Exempel 3. Sfäriska koordinater $(r,\, \theta,\, \phi)$. Vi har

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta. \tag{1.6}$$

Således är

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} &= (\sin\theta\cos\phi,\, \sin\theta\sin\phi,\, \cos\theta),\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} &= (r\cos\theta\cos\phi,\, r\cos\theta\sin\phi,\, -r\sin\theta),\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} &= (-r\sin\theta\sin\phi,\, r\sin\theta\cos\phi,\, 0),
\end{aligned}$$

$$h_r = \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\right|\right| = 1, \quad h_\theta = \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right|\right| = r, \quad h_\phi = \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right|\right| = r\sin\theta,$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &:= \hat{r} = (\sin\theta\cos\phi,\, \sin\theta\sin\phi,\, \cos\theta),\\
\boldsymbol{e}_2 &:= \hat{\theta} = (\cos\theta\cos\phi,\, \cos\theta\sin\phi,\, -\sin\theta),\\
\boldsymbol{e}_3 &= \hat{\phi} = (-\sin\phi,\, \cos\phi, 0).
\end{aligned}$$

Man kan kolla direkt eller med en bild att $(\hat{r},\, \hat{\theta},\, \hat{\phi})$ är ett ONHS.

1.1. **Längdelement.** Vi har $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ så

$$d\boldsymbol{r} = (dx,\, dy,\, dz) \text{ och } dr = ||d\boldsymbol{r}|| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{1.7}$$

Givet ett godtyckligt koordinatsystem $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ kan vi lika väl skriva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_1,\, u_2,\, u_3)$ och enligt kedjeregeln så är

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\, du_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\, du_3. \tag{1.8}$$

Per definitionerna (1.2), (1.3) kan detta skrivas som

$$d\boldsymbol{r} = h_1 du_1 \boldsymbol{e}_1 + h_2 du_2 \boldsymbol{e}_2 + h_3 du_3 \boldsymbol{e}_3. \tag{1.9}$$

Om nu $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ är ett ONHS så medför Pytagoras sats att

$$dr = ||d\boldsymbol{r}|| = \sqrt{h_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, du_2^2 + h_3^2\, du_3^2}. \tag{1.10}$$

1.2. **Ytareaelement.** För $i \in \{1, 2, 3\}$ kallas en nivåyta $u_i(x, y, z) = C$ för en u_i-*yta*.

För att underlätta med notationen, antag att $i = 1$ till att börja med. En u_1-yta kan parametriseras med u_2 och u_3. Enligt det vi har sett i flervariabelanalysen så ges därmed ytareaelementet på en u_1-yta av

$$dS = dS_1 = \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\right|\right|\, du_2\, du_3 = ||h_2\boldsymbol{e}_2 \times h_3\boldsymbol{e}_3||\, du_2\, du_3 = h_2h_3||\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3||\, du_2\, du_3. \tag{1.11}$$

Om nu de u_i utgör ett ONHS så är $||\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3|| = ||\boldsymbol{e}_1|| = 1$ så $dS_1 = h_2h_3\, du_2\, du_3$.

Allmänt, för $i \in \{1, 2, 3\}$ och ett ONHS gäller:

$$dS_i = \prod_{j \neq i} h_j\, du_j. \tag{1.12}$$

En normal till en u_i-yta i ett ONHS ges av

$$d\vec{S}_i = \hat{N}\, dS_i = \left(\prod_{j\neq i} h_j\, du_j\right) \boldsymbol{e}_i. \tag{1.13}$$

Exempel. Vi tar exemplet med sfäriska koordinater ($\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$). Vi har tre sorters nivåytor:

Fall 1: r = konstant, säg $r = a$. Detta är just en sfär av radie a kring origo. Enligt (1.12) så är

$$dS = h_\theta h_\phi\, d\theta\, d\phi = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi, \tag{1.14}$$

vilket överensstämmer med det vi har sett i flervariabelanalysen.

Fall 2: θ = konstant. Detta är en halvkon med spets i origo. Enligt (1.12) så är

$$dS = h_r h_\phi\, dr\, d\phi = r \sin\theta\, dr\, d\phi. \tag{1.15}$$

Eftersom θ hålls konstant kan detta skrivas om till

$$dS = \frac{1}{\sin\theta} R\, dR\, d\phi, \tag{1.16}$$

där $R = r\sin\theta$ är den polära radien i xy-planet.

Låt oss verifiera (1.16) från ett annat perspektiv. En halvkon kan beskrivas som en funktionsyta $z = f(x, y)$ där

$$z = c\sqrt{x^2 + y^2}, \quad c = \cot\theta. \tag{1.17}$$

Enligt det vi såg i flervariabelanalysen så ges därmed ytareaelementet av

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy = \dots \\ &= \sqrt{1 + c^2}\, dx\, dy = \frac{1}{\sin\theta}\, dx\, dy = \frac{1}{\sin\theta} R\, dR\, d\phi, \quad \text{v.s.v.} \end{aligned}$$

Fall 3: ϕ = konstant. Detta är ett vertikalt halvplan. Enligt (1.12) så är

$$dS = h_r h_\theta dr\, d\theta = r\, dr\, d\theta. \tag{1.18}$$

Vi verifierar också detta från det Cartesiska perspektivet. Ett plan har ekvation på formen $ax + by + cz = d$, där (a, b, c) är en normalvektor. För ett vertikalt plan så är $c = 0$ och $\hat{\phi} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$ är en normalvektor. En $\hat{\phi}$-yta kan således skrivas som $F(x, y, z) = d$, där

$$F(x, y, z) = (-\sin\phi)x + (\cos\phi)y. \tag{1.19}$$

Notera att $F_z = 0$ så om vi ska tillämpa implicita funktionssatsen så måste vi använda antingen x eller y som den beroende variabeln. Vi har $F_y = \cos\phi \neq 0$, så länge $\phi \notin \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Antag detta för enkelhets skull (i specialfallen $\phi \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$ kan man ta x som den beroende variabeln i stället). Enligt det vi såg i flervariabelanalysen så är

$$dS = \frac{||\nabla F||}{|F_y|}\, dx\, dz = \frac{\sqrt{(-\sin\phi)^2 + (\cos\phi)^2 + 0^2}}{|\cos\phi|}\, dx\, dz = \frac{1}{|\cos\phi|}\, dx\, dz. \tag{1.20}$$

För att visa att detta överensstämmer med (1.18) så återstår att visa att

$$r\, dr\, d\phi = \frac{1}{|\cos\phi|}\, dx\, dz \quad \Leftrightarrow \quad \left|\left|\frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)}\right|\right| = r|\cos\phi|, \tag{1.21}$$

vilket kan lätt kontrolleras utifrån definitionerna $x = r\sin\theta\cos\phi$, $z = r\cos\theta$.

1.3. **Volymelement.** A priori har vi

$$dV = dx\,dy\,dz = \left|\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,\,u_2,\,u_3)}\right|\right|\,du_1\,du_2\,du_3. \tag{1.22}$$

Sedan gäller att

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,\,u_2,\,u_3)} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} & \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} & \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}. \tag{1.23}$$

Därmed är

$$\left|\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,\,u_2,\,u_3)}\right|\right| = h_1h_2h_3\,|\det([\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3])|. \tag{1.24}$$

I fall vi har ett ONHS så är den inre determinanten lika med $+1$ och i så fall gäller formeln

$$dV = h_1h_2h_3\,du_1\,du_2\,du_3. \tag{1.25}$$

Exempel: För sfäriska koordinater har vi

$$dV = h_r h_\theta h_\phi\,dr\,d\theta\,d\phi = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi, \tag{1.26}$$

vilket överensstämmer med det vi har sett i flervariabelanalysen.

Definitioner/Notation 2.1. Följande tas upp i flervariabelanalysen. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara en skalärvärd funktion och $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ett vektorfält, säg $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Vi definierar

$$\operatorname{grad}(f) = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right), \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right), \tag{2.3}$$

$$\text{Laplacian}(f) = \Delta f = \nabla^2 f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{2.4}$$

För att de tre första definitionerna ska vara meningsfulla så antar vi att respektive funktioner tillhör klassen C^1, medan att i definitionen av Laplacian så antas $f \in C^2$.

Nu vill hi hitta formler för grad, div, curl och Laplacian i godtyckliga ONHS.

2.1. **Gradient.** Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara en C^1-funktion. Betrakta differentialen df. I Cartesiska koordinater har vi

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz = \nabla f \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{2.5}$$

Om nu (u_1, u_2, u_3) är ett ONHS så har vi enligt (1.9) att

$$df = \nabla f \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} h_i \boldsymbol{e}_i\, du_i\right) = \sum_{i=1}^{3} h_i (\nabla f \cdot \boldsymbol{e}_i)\, du_i. \tag{2.6}$$

Å andra sidan så är

$$df = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial u_i}\, du_i. \tag{2.7}$$

Jämförelse av (2.6) och (2.7) medför att

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i}. \tag{2.8}$$

Men eftersom $||\boldsymbol{e}_i|| = 1$ så är $\nabla f \cdot \boldsymbol{e}_i$ lika med komponenten av ∇f i riktningen $\boldsymbol{e}_i$. M.a.o.

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i}\right) \boldsymbol{e}_i. \tag{2.9}$$

Notera att (2.9) reducerar till (2.1) i det Cartesiska fallet.

Cylindriska koordinater: Från Exempel 2 i Section 1 så blir (2.9) i detta fall

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\, \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\, \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\, \boldsymbol{k}. \tag{2.10}$$

Sfäriska koordinater: Från Exempel 3 i Section 1 så blir (2.9) i detta fall

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\, \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\, \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}\, \hat{\phi}. \tag{2.11}$$

2.2. **Divergens.** Låt $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ett C^1-vektorfält, $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ i Cartesiska koordinater, dvs $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}$.

Låt nu (u_1, u_2, u_3) vara ett ONHS och låt $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$ med avseende på basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, dvs $\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^3 \mathcal{F}_i \boldsymbol{e}_i$.

Sats (ekv. (4.18) i CF).

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} \mathcal{F}_i \right). \tag{2.12}$$

Notera att (2.12) reducerar till (2.2) i det Cartesiska fallet.

Cylindriska koordinater: Från Exempel 2 i Section 1 så blir (2.12) i detta fall

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\mathcal{F}_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{F}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} (r\mathcal{F}_z) \right].$$

Eftersom $\mathcal{F}_z = F_3$ och $\frac{\partial r}{\partial z} = 0$ så kan detta förenklas till

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\mathcal{F}_r) + \frac{\partial \mathcal{F}_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \tag{2.13}$$

Sfäriska koordinater: Från Exempel 3 i Section 1 så blir (2.12) i detta fall

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin\theta\, \mathcal{F}_r \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin\theta\, \mathcal{F}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r\, \mathcal{F}_\phi) \right]$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2\, \mathcal{F}_r \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta\, \mathcal{F}_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \mathcal{F}_\phi}{\partial \phi}. \tag{2.14}$$

Bevis av Satsen: Vi delar upp beviset i sex steg.

Steg 1: Eftersom båda leden av (2.12) är uppenbarligen linjära funktioner av $\boldsymbol{F}$ så räcker det att bevisa formeln i vart och ett av de tre fallen

$$\boldsymbol{F} = (F_1, 0, 0), \quad \boldsymbol{F} = (0, F_2, 0), \quad \boldsymbol{F} = (0, 0, F_3).$$

Vi presenterar beviset i det första fallet - de övriga två hanteras likadant. Så framöver antas att $\boldsymbol{F} = (F_1, 0, 0)$. VL av (2.12) blir i så fall helt enkelt $\frac{\partial F_1}{\partial x}$.

Steg 2: Vi börjar med att utrycka de $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, 3$, i termer av F_1. Eftersom vi har med ett ONHS att göra så är $\mathcal{F}_i = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_i$. Men

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_i &= (F_1, 0, 0) \cdot \frac{1}{h_i} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \\ &= (F_1, 0, 0) \cdot \frac{1}{h_i} \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial y}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) = \frac{F_1}{h_i} \frac{\partial x}{\partial u_i}. \end{aligned}$$

Så för att bevisa satsen återstår det att bevisa att

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial x}{\partial u_i} F_1 \right). \tag{2.15}$$

Steg 3: Jag påstår att

$$\frac{1}{h_i^2} \frac{\partial x}{\partial u_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.16}$$

och dessutom, men vi kommer inte att behöva dem, att

$$\frac{1}{h_i^2} \frac{\partial y}{\partial u_i} = \frac{\partial u_i}{\partial y}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.17}$$

$$(2.18) \qquad \frac{1}{h_i^2}\frac{\partial z}{\partial u_i} = \frac{\partial u_i}{\partial z}, \quad i = 1, 2, 3.$$

För att bevisa dessa relationer, betrakta 3×3-matrisen

$$(2.19) \qquad A = \begin{bmatrix} -- \, \partial \boldsymbol{r}/\partial u_1 \, -- \\ -- \, \partial \boldsymbol{r}/\partial u_2 \, -- \\ -- \, \partial \boldsymbol{r}/\partial u_3 \, -- \end{bmatrix}.$$

Å ena sidan, $A^T = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}$, vilket innebär att

$$(2.20) \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \frac{\partial(u_1,\, u_2,\, u_3)}{\partial(x,y,z)}.$$

Å andra sidan kan vi skriva

$$A = \begin{bmatrix} -- \, h_1\boldsymbol{e}_1 \, -- \\ -- \, h_2\boldsymbol{e}_2 \, -- \\ -- \, h_3\boldsymbol{e}_3 \, -- \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad AA^T = \begin{bmatrix} -- \, h_1\boldsymbol{e}_1 \, -- \\ -- \, h_2\boldsymbol{e}_2 \, -- \\ -- \, h_3\boldsymbol{e}_3 \, -- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{bmatrix},$$

där den sista likheten är pga att vi har ett ONHS. Följdaktligen så måste

$$(2.21) \qquad A^{-1} = A^T \begin{bmatrix} h_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & h_3^{-2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} h_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & h_3^{-2} \end{bmatrix} A.$$

Så från (2.20) och (2.21) har vi att

$$\frac{\partial(u_1,\, u_2,\, u_3)}{\partial(x,y,z)} = \begin{bmatrix} h_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & h_3^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -- \, \partial \boldsymbol{r}/\partial u_1 \, -- \\ -- \, \partial \boldsymbol{r}/\partial u_2 \, -- \\ -- \, \partial \boldsymbol{r}/\partial u_3 \, -- \end{bmatrix}.$$

Denna matrisekvation, när den läses elementvis, ger (2.16), (2.17) och (2.18).

Steg 4: Från (2.15) och (2.16) så återstår att bevisa att

$$(2.22) \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_i}\left(h_1h_2h_3\,\frac{\partial u_i}{\partial x}\,F_1\right).$$

Enligt produktregeln så är

$$(2.23) \qquad \frac{\partial}{\partial u_i}\left(h_1h_2h_3\,\frac{\partial u_i}{\partial x}\,F_1\right) = h_1h_2h_3\,\frac{\partial u_i}{\partial x}\,\frac{\partial F_1}{\partial u_i} + F_1\frac{\partial}{\partial u_i}\left(h_1h_2h_3\,\frac{\partial u_i}{\partial x}\right),$$

så HL av (2.22) kan skrivas som en summa av två termer

$$(2.24) \qquad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_1}{\partial u_i}\,\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{F_1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_i}\left(h_1h_2h_3\,\frac{\partial u_i}{\partial x}\right).$$

Den första summan är precis $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, enligt kedjeregeln, så det bara återstår att bevisa att

$$(2.25) \qquad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_i}\left(h_1h_2h_3\,\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) = 0.$$

Steg 5: Jag påstår följande tre relationer:

$$(2.26) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u_2,\, u_3)} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial y}{\partial u_2}\,\frac{\partial z}{\partial u_3} - \frac{\partial y}{\partial u_3}\,\frac{\partial z}{\partial u_2}\right],$$

$$(2.27) \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u_3,\, u_1)} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial y}{\partial u_3}\,\frac{\partial z}{\partial u_1} - \frac{\partial y}{\partial u_1}\,\frac{\partial z}{\partial u_3}\right],$$

$$(2.28) \qquad \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u_1,\, u_2)} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial y}{\partial u_1}\,\frac{\partial z}{\partial u_2} - \frac{\partial y}{\partial u_2}\,\frac{\partial z}{\partial u_1}\right].$$

Vi bevisar dessa med hjälp av Cramers regel. Kom ihåg att om A är en inverterbar $n \times n$-matris och $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ så säger Cramers regel att den unika lösningen $\boldsymbol{x} = [x_1\, x_2\, \ldots\, x_n]^T$ till $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ satisfierar

$$x_i = \frac{\det(A_i(\boldsymbol{b}))}{\det(A)}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.29}$$

där $A_i(\boldsymbol{b})$ är samma matris som A fast den i:te kolumnen byts ut mot $\boldsymbol{b}$. För att utnyttja detta konstaterar vi att, per definition av Jacobimatriser,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1,\, u_2,\, u_3)} \frac{\partial(u_1,\, u_2,\, u_3)}{\partial(x, y, z)} = I_3. \tag{2.30}$$

Läser vi den första kolumnen i båda leden så säger det att $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, där

$$A = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1,\, u_2,\, u_3)}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial x \\ \partial u_2/\partial x \\ \partial u_3/\partial x \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Direkt tillämpning av Cramers regel till $\boldsymbol{x}$:s komponenter ger (2.26), (2.27) och (2.28).

Steg 6: Insättning av (2.26), (2.27) och (2.28) in i (2.25) ger att det återstår att bevisa att

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial z}{\partial u_3} - \frac{\partial y}{\partial u_3}\frac{\partial z}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial y}{\partial u_3}\frac{\partial z}{\partial u_1} - \frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial z}{\partial u_3}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial z}{\partial u_2} - \frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial z}{\partial u_1}\right). \tag{2.32}$$

Med hjälp av produktregeln så kan HL utvecklas till en summa av 12 termer, 6 av dem med ett $+$ tecken och 6 med ett $-$ tecken. Eftersom x, y, z är C^2-funktioner av u_1, u_2, u_3 (detta antogs redan från början i Section 1) så gäller Clairauts sats, och då kan man lätt kontrollera att de 12 termerna kancellerar parvis. Därmed är satsen bevisad.

2.3. **Laplacian.** Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara en C^2-funktion. Per definition så är $\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f)$. Så vi först tillämpar (2.12) med $\boldsymbol{F} = \nabla f$ och får

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} (\nabla f)_i\right), \tag{2.33}$$

där $(\nabla f)_i$ = komponenten av ∇f längs $\boldsymbol{e}_i$. Så $(\nabla f)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial u_i}$, enligt (2.9). Insättning in i (2.33) ger formeln

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial f}{\partial u_i}\right). \tag{2.34}$$

Cylindriska koordinater: Från (2.34) och Exempel 2 i Section 1 har vi

$$\Delta f = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{2.35}$$

Sfäriska koordinater: Från (2.34) och Exempel 3 i Section 1 har vi

$$\Delta f = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \tag{2.36}$$

Definition 2.2. En funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ säga vara *sfäriskt symmetrisk* om f är oberoende av den sfäriska radien r.

En sfäriskt symmetrisk funktion f kan betraktas som en funktion vars definitionsmängd är enhetssfären $S^2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : ||\boldsymbol{x}|| = 1\}$. Om den är minst C^1 så innebär det att $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$. Om den är minst C^2 så kan man tala om den *sfäriska Laplacianen* av f, vilket fås genom att sätta $r = 1$ och $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$ i (2.36).

Alltså, för en sfäriskt symmetrisk f gäller

$$\Delta_{S^2} f = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}. \tag{2.37}$$

2.4. **Curl (a.k.a. Rotation).** För ett C^1-fält $\boldsymbol{F}$ gäller

Sats (ekv. (4.20) i CF.

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1\mathcal{F}_1 & h_2\mathcal{F}_2 & h_3\mathcal{F}_3 \end{vmatrix}. \tag{2.38}$$

Man skulle kunna bevisa detta på ett liknande sätt som vi bevisade (2.12), men det skulle bli ännu krångligare. I stället kan (2.38) härledas från Stokes Sats. Vi kommer inte att gå igenom detta - den intresserade läsaren kan kolla igenom härledningen i avsnitt 4.4 av CF-kompendiet.