Tentamen i Flervariabelmatematik Z MVE 041/MMGL32 den 30 aug -14 kl 8.30-12.30

Hjälpmedel: Beta, inga räknare Telefon: Åse Fahlander 0703-088304 Där inget annat anges är uppgifterna värda 6p Totalpoäng: 50 betygsgränser 20, 30 och 40 resp 20 och 36

1) Låt $f(x,y) = xe^{x+xy}$. I vilken riktning är tillväxten störst i punkten (0,1) och hur stor är den? Hur stor är tillväxten i riktning (1,1) i samma punkt ? Vad är ekvationen för tangentplanet i punkten? (8p)
2) Hur skall differentialekvationen $x'' + x' + x = t^2$ presenteras för ode45 ? (4p)
3) A är en symmetrisk matris som löser ekvationen $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ställ upp ett ekvationssystem för matrisens element och skriv upp iterationsformeln för att lösa systemet med Newtons metod.
4) Beräkna $\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$ där D beskrivs av $x \geq 0, y \geq 0 \ och \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$
5) Beräkna $\iiint_D y \, dxdydz$ där D är pyramiden med hörn i (0,0,0),(1,0,0),(0,1,0) och (0,0,1)
6) Bestäm (minsta) avståndet mellan parabeln $y = x^2$ och linjen $y = 2x - 2$
7) Finn en potential till fältet $(P,Q) = e^{x^2y}(1 + 2x^2y, x^3)$ och beräkna $\int_{(1,1)}^{(1,2)} Pdx + Qdy$
8) Lös, t ex genom att använda substitutionen $u = x^2 - y^2$, $v = x^2y$ differentialekvationen $yf_x' + xf_y' = 2xy^2 + x^3$. Bestäm den lösning som uppfyller $f(x,0) = x^3$ (8p)

Exam 20140830 – Solutions (probs 1 – 7)

#1. $f = xe^{x+xy}$

$$f_1 = e^{x+xy} + x(1+y)e^{x+xy}$$

$$f_2 = x^2 e^{x+xy}$$

$$\therefore \bar{\nabla} f(0,1) = (1+0,\ 0) = (1,0)$$

$$|\bar{\nabla} f(0,1)| = 1$$

In direction $\bar{v} = (1,1)$. Let $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$$D_{\bar{u}} f = \bar{u} \cdot \bar{\nabla} f$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{x+xy}(1+x+xy) + x^2 e^{x+xy}\right)$$

$$\Rightarrow D_{\bar{u}} f\Big|_{(0,1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^0 = 1/\sqrt{2}$$

Tangent Plane: $z = f(0,1) + f_1(0,1)(x-0) + f_2(0,1)(y-1)$

$$\Rightarrow z = 0 + x$$

#2 $$x'' + x' + x = t^2$$

Let $u^1 = x$, $u^2 = x'$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} u^1 = u^2 \\ \frac{d}{dt} u^2 = t^2 - u^1 - u^2 \end{cases}$$

Define $F = @(t,U)[U(2), t^2 - U(1) - U(2)]$

$[t,U] = ode45(F, [t_0, t_f], [U_0^1, U_0^2])$

#3 Let
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

A satisfies $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, so

$$a^2+b^2 + 2a = 1$$
$$ab+bc + 2b = 0$$
$$b^2+c^2 + 2c = 2$$

Let
$$F^1(a,b,c) = a^2+b^2+2a-1$$
$$F^2(a,b,c) = ab+bc+2b$$
$$F^3(a,b,c) = b^2+c^2+2c-2$$
, $\bar{F} = (F^1, F^2, F^3)$

Desired solution (a,b,c) solves $\bar{F} = 0$.

#3 cont. Newton's iteration

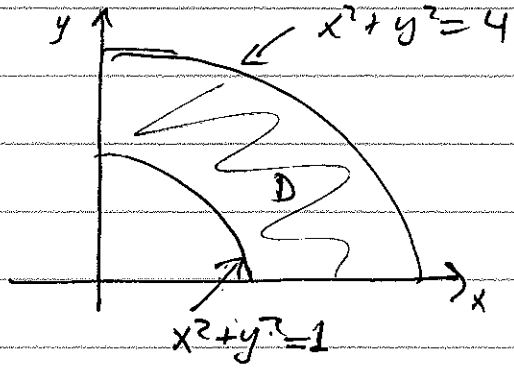
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} - \left(D\bar{F}(a_n, b_n, c_n) \right)^{-1} \bar{F}(a_n, b_n, c_n)$$

with

$$D\bar{F}(a, b, c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial a} & \frac{\partial F^1}{\partial b} & \frac{\partial F^1}{\partial c} \\ \frac{\partial F^2}{\partial a} & \frac{\partial F^2}{\partial b} & \frac{\partial F^2}{\partial c} \\ \frac{\partial F^3}{\partial a} & \frac{\partial F^3}{\partial b} & \frac{\partial F^3}{\partial c} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a+2 & 2b & 0 \\ b & a+c+2 & b \\ 0 & 2b & 2c+2 \end{pmatrix}$$

#4



$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

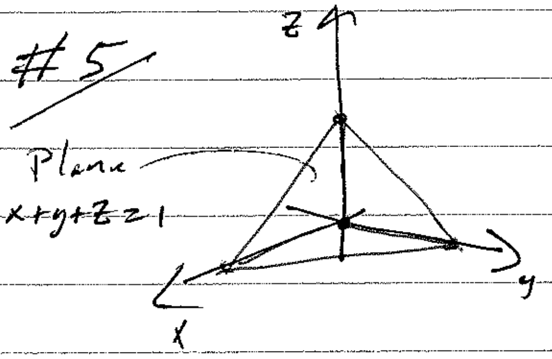
$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=1}^{4} e^{r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{d}{dr} e^{r^2}\, dr$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{4}\left(e^{16} - e^{1}\right)}$$

(4)

#5



$$\iiint_D y \, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{z=0}^{1}\int_{x=0}^{1-z}\int_{y=0}^{1-x-z} y \; dy\, dx\, dz$$

$$= \int_{z=0}^{1} dz \int_{x=0}^{1-z} dx \; \frac{1}{2}(1-x-z)^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_{z=0}^{1} dz \int_{x=0}^{1-z} dx \left(1 - 2x^2 + x^2 - 2z + 2xz + z^2\right)$$

... ugly!

Bad choice. Let's try x-first

$$\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1-y}\int_{x=0}^{1-y-z} y \, dx\, dz\, dy = \int_{y=0}^{1} dy \; y \int_{z=0}^{1-y} dz \, (1-y-z)$$

$$= \int_{y=0}^{1} dy \; y \left((1-y)^2 - \frac{1}{2}(1-y)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{y=0}^{1} dy \; y(1-y)^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} dy \, (y - 2y^2 + y^3)$$

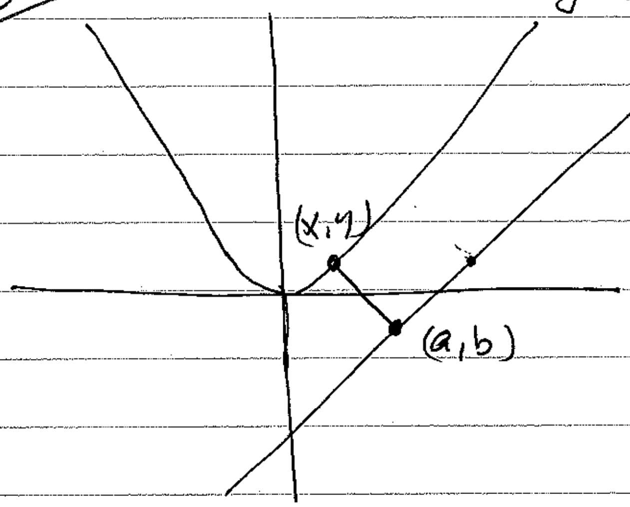
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{12} - \frac{8}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{24}$$

#6



~~Note~~ Let $f(x,y) = y - x^2$
$g(a,b) = b-2a+2$

Note that
$\bar{\nabla} f = -2x\hat{i} + \hat{j}$
$\bar{\nabla} g = -2\hat{i} + \hat{j}$

At min distance point $\bar{\nabla} f \parallel \bar{\nabla} g \Rightarrow x=1.$

The square of the distance between (x,y) and (a,b) is

$$d^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$
$$= (x-a)^2 + (x^2+2-2a)^2, \text{ restricting to curves.}$$

Min is at $x=1$, so let

$$h(a) = (1-a)^2 + (1+2-2a)^2 \quad \text{i.e. } d^2\Big|_{x=1}$$

Solve $h'(a) = 0$

$$\Rightarrow (1-a) + 2(3-2a) = 0$$
$$\Rightarrow a = 7/5$$

$\therefore\ b = 4/5,\ y=1$ and $\boxed{d = \frac{1}{\sqrt{5}}}$

#7

Let $\bar{F} = e^{x^2y}(1+2x^2y)\,\hat{i} + e^{x^2y}x^3\,\hat{j}$

Then $\frac{\partial\phi}{\partial x} = F^1$, $\frac{\partial\phi}{\partial y} = F^2$

if $\bar{F}$ is conservative.

From the latter

$$\phi_{test}(x,y) = \int F^2(x,y)\,dy$$

$$= \int x^3 e^{x^2y}\,dy$$

$$= x e^{x^2y} + h(x)$$

Now, $\frac{\partial\phi_{test}}{\partial x} = e^{x^2y} + 2x^2y\,e^{x^2y} + \frac{\partial}{\partial x}h(x)$

and $F^1 = e^{x^2y} + 2x^2y\,e^{x^2y}$

So $\frac{\partial}{\partial x}h(x) = 0 \Rightarrow h(x) = C$ ~ constant.

$\therefore \quad \phi(x,y) = x e^{x^2y} + C$

and $\int_{(1,1)}^{(1,2)} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \phi(1,2) - \phi(1,1)$

$$= e^2 - e^1$$