Tentamen i MVE041 och MMGL32 Flervariabelmatematik

Den 15 April 2015, kl. 830-1230

Hjälpmedel: BETA, inga räknare.

Telefon: Timo Hirscher 0703-088304

Totalpoäng 50. Betygsgränser 20, 30, 40.

1. Låt $f(x,y) = \sin(xy) - \cos(xy)$, och $p = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}/2)$. I vilken riktning är tillväxten störst i punkten p, och hur stor är den? Hur stor är tillväxten i riktning $(1,1)$ i punkten? Vad är ekvationen för tangentplanet i samma punkt? (8p)

2. Hur skall differentialekvationen $x'' + 4x' - x = \cos(t)$ presenteras för ode45? (4p)

3. Vi vill dra en kurva $y = A\cos(bx + \varphi)$ genom punkterna $(0,1), (1,2)$ och $(2,1)$. Skriv upp ett ekvationssytem för parametrarna A, b och φ och skriv upp iterationsformeln för att lösa systemet med Newtons metod. (6p)

4. Beräkna volymen av området som finns inuti sfären $x^2+y^2+z^2 = 4$ och utanför dubbelkonen $z^2 = \sqrt{x^2+y^2}$. Vad är volymen som finns inuti sfären och innesluten i dubbelkonen? (6p)

5. Beräkna maximum av $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ för (x,y,z) med $x+y+z=1$. (6p)

6. Finn en potential till fältet $(P,Q) = \left(y^2e^{xy^2} + 3x^2, 2xye^{xy^2} - \sin(y)\right)$ och beräkna $\int_{(-1,0)}^{(1,\pi/2)} Pdx + Qdy$. (6p)

7. Beräkna $\int_C (3xy^4 - xy)dx + (xy + 6x^2y^3)dy$, där C är den slutna kurva från $(0,0)$ till $(1,0)$, till $(1,1)$, till $(0,1)$ och tillbaka till ursprunget. (6p)

8. Lös differentialekvationen $yf'_y - 2xf'_x + 1 = 0$ t. ex genom att använda substitutionen $t = xy^2, s = xy$. Bestäm sedan den lösning som uppfyller $f(x,x) = 5\ln(x)$. (8p)

2015 04 15 — Solutions

#1 $\quad f_1(x,y) = y\cos(xy) + y\sin(xy) \Rightarrow f_1(\sqrt{\pi}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$f_2(x,y) = x\cos(xy) + x\sin(xy) \Rightarrow f_2(\sqrt{\pi}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}) = \sqrt{\pi}$

a) $\boxed{\bar{\nabla} f\big|_p = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1,2)}$, $\left|\bar{\nabla} f\big|_p\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{\pi} = \boxed{\frac{\sqrt{5\pi}}{2}}$

b) $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \rightarrow \bar{u}\cdot\bar{\nabla} f\big|_p = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

c) $z = 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}(x - \sqrt{\pi}) + \sqrt{\pi}\left(y - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$

$\boxed{z = \left(1 - \pi\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}(x + 2y)}$

#2 Let $u_1 = x$, $u_2 = x'$

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = \cos(t) - 4u_2 + u_1 \end{cases}$$

$f = @(t,u)\,[u(2), \cos(t) - 4u(2) + u(1)]'$

3 Let $\bar{F} = (F^1, F^2, F^3)$ with

$$F^1(A,b,\varphi) = A\cos\varphi - 1$$

$$F^2(A,b,\varphi) = A\cos(b+\varphi) - 2$$

$$F^3(A,b,\varphi) = A\cos(2b+\varphi) - 1$$

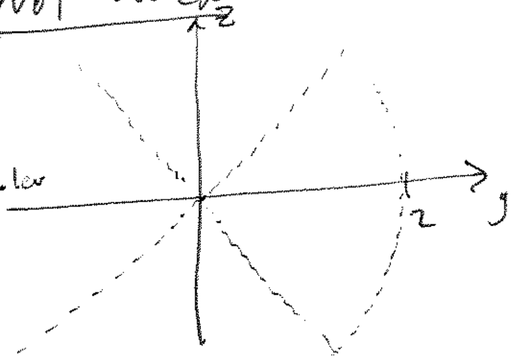
Desired curve satisfies $\bar{F} = 0$.

$$D\bar{F} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -A\sin\varphi \\ \cos(b+\varphi) & -A\sin(b+\varphi) & -A\sin(b+\varphi) \\ \cos(2b+\varphi) & -2A\sin(2b+\varphi) & -A\sin(2b+\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ b_{n+1} \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n \\ b_n \\ \varphi_n \end{pmatrix} - \left(D\bar{F}(A_n, b_n, \varphi_n)\right)^{-1} \bar{F}(A_n, b_n, \varphi_n)}$$

Problem Not on Exam

Take the right circular cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$



$$V_1 = \int_{r=0}^{2} \int_{\theta=\pi/4}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{2} r^2 \left(-\cos\theta\right)\Big|_{\pi/4}^{\frac{3\pi}{4}} dr$$

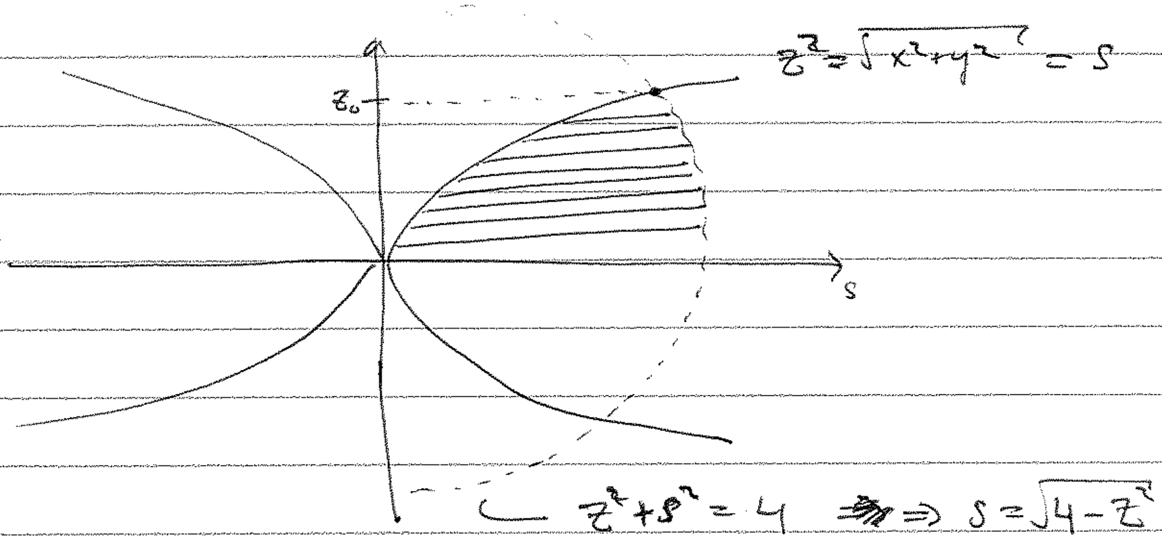
$$= 2\pi\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^2$$

$$\boxed{= \frac{16}{3}\sqrt{2}\,\pi}$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 - \frac{16}{3}\sqrt{2}\,\pi$$

$$\boxed{= \frac{16}{3}\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)}$$

#4



Cylindrical Coords:

Integrate θ 0 to 2π

Integrate s z^2 to $\sqrt{4-z^2}$

Integrate z 0 to z_0.

$$V = 2\pi \int_0^{z_0} \int_{z^2}^{\sqrt{4-z^2}} s\,ds\,dz$$

$$= \pi \int_0^{z_0} (s^2)\Big|_{z^2}^{\sqrt{4-z^2}} dz$$

$$= \pi \int_0^{z_0} (4 - z^2 - z^4)\,dz$$

$$= \pi \left(4z_0 - \frac{1}{3} z_0^3 - \frac{1}{5} z_0^5\right)$$

Find z_0

$s = z^2$, $z^2 + s^2 = 4$

$\Rightarrow s^2 + s - 4 = 0$

$s = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{17})$

$s_0 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{17})$, pos.

$z_0 = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{17}-1)\right)^{1/2}$

$V_{outside} = 2V$

$V_{inside} = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 - V_{outside}$.

□

#5 Define $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$

$g(x,y,z) = x+y+z-1$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -2x e^{-x^2-y^2-z^2} + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -2y e^{-x^2-y^2-z^2} + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -2z e^{-x^2-y^2-z^2} + \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = z$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x+y+z-1 = 0 \Rightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$$

$$\boxed{f\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right) = e^{-1/3}}$$

#6 $\phi = \int y^2 e^{xy^2} + 3x^2 \, dx = e^{xy^2} + x^3 + h(y)$

and $\phi = \int 2xy e^{xy^2} - \sin(y) \, dy = e^{xy^2} + \cos(y) + g(x)$

$$\boxed{\therefore \ \phi = e^{xy^2} + x^3 + \cos(y)}$$

$$\int_{(-1,0)}^{(1,\pi/2)} P dx + Q dy = e^{\pi^2/4} + 1 - (1 - 1 + 1) \boxed{= e^{\pi^2/4}}$$

#7 $\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$ Green's Thm.

$= \iint (y + 12xy^3 - 12xy^3 + x) \, dx\, dy$

$= \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} (x+y) \, dx\, dy$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \boxed{= 1}$

Green $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

#8 Suppose $f(x,y) = g(t(x,y), s(x,y))$

$t = xy^2$, $s = xy$

$$f'_x = \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = g_t y^2 + g_s y$$

$$f'_y = \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} = g_t\, 2xy + g_s x$$

so, $y f'_y - 2x f'_x + 1$

$$= g_t\, 2xy^2 + g_s xy - 2x(g_t y^2 + g_s y) + 1$$

$$= -g_s xy + 1$$

PDE : $g_s = 1/s \Rightarrow g = \ln(s) + h(t)$

$$\Rightarrow f(x,y) = \ln(xy) + h(xy^2)$$

if $f(x,x) = 5\ln(x)$, Then we have

$2\ln(x) + h(x^3) = 5\ln(x)$

$\Rightarrow h(xy^2) = \ln(xy^2)$

So $f(x,y) = \ln(xy) + \ln(xy^2) \boxed{= \ln(x^2y^3)}$