Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2013-08-31 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anders Martinsson , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Ur klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ borras ett cylindrisk hål med radien $\frac{1}{2}$. Cylinderns axel är parallell med z-axeln och går genom punkten $(\frac{1}{2}, 0, 0)$. Beräkna volymen av den del av klotet som återstår. (6p)

7. Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan som ges av parametriseringen $\mathbf{r} = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + 2\sin 2t\,\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ och låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (e^y + x^3)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$. Visa att kurvan $\mathcal{C}$ ligger i ytan $z = xy$ och använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$. (6p)

8. Formulera satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen och bevisa att om vektorfältet är konservativt så är kurvintegralen oberoende av integrationsvägen. (6p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 12/13

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	**MVE085 Flervariabelanalys V2 2013-08-31**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm och skissa (den maximala) definitionsmängden till funktionen $f(x, y) = \sqrt{x + y^2}$ (2p)

Svar och skiss:

....

(b) Bestäm ekvationer för tangentplanet och normallinjen till nivåytan $e^{x+2y+3z} = 1$ genom origo. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x, y) = \dfrac{1}{x + 2y}$ i punkten $(1, 0)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper.
Motivera och förklara så väl du kan.

2. (a) Förklara vad som menas med begreppen *kritisk punkt* respektive *lokalt maximum*, för en funktion $f(x, y)$ av två variabler. (2p)

(b) Bestäm de kritiska punkterna till $f(x, y) = 3x - x^3 - 3xy^2$ och avgör om funktionen har ett lokalt maximum i någon av dem. (4p)

Anonym kod	**MVE085 Flervariabelanalys V2 2013-08-31**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ för den del Ω av klotet $x^2+y^2+z^2 \leq 2$ som ligger i första oktanten, då klotet består av ett homogent material. (Tips: $\bar{z} = \iiint_\Omega z\,dV / \iiint_\Omega dV$) (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = (2xy+z)\mathbf{i}+(x^2+2y)\mathbf{j}+(x+1)\mathbf{k}$ är konservativt och bestäm en potential till $\mathbf{F}$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. (a) Visa att transformationen $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$ avbildar hela xy-planet *ett-ett* på hela uv-planet genom att ta fram den inversa transformationen. (2p)

(b) Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{x+y}\,dxdy$, där D är det område som begränsas av linjerna $x-y=0,\ x-y=1,\ x+y=1$ och $x+y=2$.

(Tips: Gör variabelbytet $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$) (4p)

5. Låt $\mathcal{S}$ vara den del av paraboloiden $z = 3-x^2-y^2$ där $x^2+y^2 \leq 2$.

(a) Beräkna arean av ytan $\mathcal{S}$. (3p)

(b) Beräkna flödet av hastighetsfältet $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i}+(y-x)\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ ner genom ytan $\mathcal{S}$. (3p)