

Tentamen

MVE085 Flervariabelanalys V2

2013-10-24 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anna Persson, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive eventuella bonuspoäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Visa att ekvationen $e^{xyz} = z - x - y$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(0, 1, 2)$ och beräkna $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 1)$. (4p)

7. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$ (obs! samma som i uppgift 5)

- (a) Visa att $\mathbf{G} = (\frac{1}{3}x^3 + xy^2)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ är en vektorpotential till $\mathbf{F}$ dvs visa att $\mathbf{curl} \mathbf{G} = \mathbf{F}$.
Utnyttja sedan detta samband och Stokes sats för att beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$. (4p)

- (b) Bestäm ekvationer för fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F}$ (4p)

8. Definiera begreppen gradient och riktningsderivata för en funktion av två variabler. Bevisa sedan dels att $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a, b)$ och dels att i punkten (a, b) växer $f(x, y)$ snabbast i riktningen $\nabla f(a, b)$. (6p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 13/14

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x, y, z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2013-10-24	sid.nummer	Poäng
------------	--	------------	-------

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x, y) = y^2 + 2xy - x^3$ i punkten $(2, 1)$ och i riktningen $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$. (2p)

Lösning:

Svar

- (b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen $f(x, y) = \ln(x + 2y)$ i punkten $(1, 0)$ och använd Taylorpolynomet för att bestämma en approximation av funktionsvärdet $f(1.1, 0.2)$ (3p)

Lösning:

Svar:

- (c) En partikel rör sig längs kurvan $\mathbf{r} = \frac{2}{3}(t - 2)^{3/2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}$. Bestäm de tidpunkter $t = a$ och $t = b$ för vilka partikeln befinner sig i punkterna $(0, 2, 3)$ respektive $(\frac{2}{3}, 3, 4)$. Beräkna sedan längden av kurvan mellan punkterna. (3p)

Lösning:

Svar:

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm det största värde som funktionen $f(x, y, z) = x + y - z$ antar på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (6p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2013-10-24	sid.nummer	Poäng
------------	--	------------	-------

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + (xz + z)\mathbf{j} + (xy + y + 1)\mathbf{k}$ är virvelfritt (irrotational) och bestäm en potential till $\mathbf{F}$. (3p)

Lösning:

Svar:

- (b) Bestäm masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ för den kropp K som består av ett homogent material och som begränsas av xy -planet och paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$. (3p)
(Tips: $\bar{z} = \iiint_K z dV / \iiint_K dV$ och av symmetriskäl är $\bar{x} = \bar{y} = 0$)

Lösning:

Svar:

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = (8x^2 - y^2)\mathbf{i} + (2x^2 + y)\mathbf{j}$ och låt $\mathcal{C}$ vara randkurvan till triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(2, 0)$, och $(0, 4)$ orienterad moturs. Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ genom att...

- (a) parametrisera randbitarna och utgå från definitionen av kurvintegral. (3p)
(b) använda Greens sats. (3p)

5. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$

- (a) Visa att $\mathbf{F}$ är källfritt (solenoidal). (2p)
(b) Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$. (4p)