Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2014-01-15 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Jakob Hultgren, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive eventuella bonuspoäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. (a) Visa sambandet $dxdy = r\,dr\,d\theta$ mellan areaelementen i Cartesiska respektive polära koordinater. (2p)

(b) Beräkna integralen $\iint_{\mathcal{P}} xy\,dA$, då $\mathcal{P}$ är parallellogrammet som begränsas av de fyra linjerna $y+x=1$, $y+x=2$, $y-x=3$, $y-x=4$. (4p)

7. (a) Formulera Stokes sats. (2p)

(b) Kontrollera att satsen stämmer för vektorfältet $\mathbf{F} = y^5\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^4\mathbf{k}$ och ytan $\mathcal{S}$ som är den del av $z = x^2 + y^2$ under planet $z = 1$. Dvs beräkna båda leden i satsen och visa att de är lika. (4p)

8. (a) Definiera vad som menas med att en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är *differentierbar* i en punkt (a, b). (2p)

(b) Ge ett exempel som visar att även om de partiella derivatorna f_1 och f_2 existerar i en punkt (a, b) så behöver inte f vara differentierbar där. (3p)

(c) Vilken egenskap hos de partiella derivatorna f_1 och f_2 garanterar att f är differentierbar i punkten (a, b) ? (Obs! Det räcker att ange villkoret, du behöver inte bevisa något). (1p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 13/14

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2014-01-15	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm huruvida var och en av följande två punktmängder i $\mathbb{R}^3$ är öppen/sluten/varken eller. Ge korta motiveringar för dina svar. (2p)

$$(i)\ \ 2 \leq z \leq 3 \qquad\qquad (ii)\ \ 0 < x^2 + y^2 < 1,\ z = 0.$$

Svar och motivering:

....

(b) En partikel rör sig längs kurvan $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (1+t)\mathbf{j}\,, 0 \leq t < \infty$. Skissa banan och indikera färdriktningen. I vilken punkt befinner sig partikeln då dess fart är 5 (l.e./s) ? (3p)

Lösning och skiss:

Svar: ....

(c) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som ges av $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2+z)\mathbf{i}+\ln(y+z^2)\mathbf{j}+xyz\mathbf{k}$. Bestäm Jacobimatrisen $D\mathbf{F}$ i punkten $(1, -3, 2)$ och med hjälp av densamma bestäm ett approximativt värde för $\mathbf{F}(1.02, -2.99, 1.98)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm de största och minsta värdena som antas av funktionen $f(x, y) = x^3 - xy + y^2$ i enhetskvadraten, dvs i området $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$. (6p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2014-01-15	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm den totala massan hos ett triangulärt föremål vars hörn ligger i punkterna $(0,0)$, $(0,1)$ och $(2,1)$, om densiteten i en punkt (x,y) är e^{y^2}. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Betrakta det konservativa vektorfältet;

$$\mathbf{F} = (2x\sin(yz) + 3z^2 - y^2e^x)\mathbf{i} + (x^2z\cos(yz) - 2ye^x)\mathbf{j} + (x^2y\cos(yz) + 6xz)\mathbf{k}.$$

Bestäm en potential för $\mathbf{F}$ och beräkna $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$, där $\mathcal{C}$ är den raka sträckan från $(0,1,1)$ till $(1,0,1)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Låt $\mathbf{F} = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ och låt $\mathcal{C}$ vara övre halvan av enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$, orienterad medurs. Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ genom att...

(a) parametrisera halvcirkeln och utgå från definitionen av kurvintegral. (3p)

(b) använda Greens sats. (3p)

5. Låt $\mathcal{R}$ vara området som ligger inuti både enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och halvkonen $z \geq \sqrt{3(x^2+y^2)}$.

(a) Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^2+y^2)\mathbf{i} + (y^2+z^2)\mathbf{j} + (z^2+x^2)\mathbf{k}$ ut ur $\mathcal{R}$. (3p)

(b) Beräkna medelvärdet av z-koordinaten (dvs funktionen $f(x,y,z) = z$) på området $\mathcal{R}$. (3p)