Lösningsförslag till tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2014-01-15 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Jakob Hultgren, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive eventuella bonuspoäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. (a) Visa sambandet $dxdy = r\,dr\,d\theta$ mellan areaelementen i Cartesiska respektive polära koordinater. (2p)

(b) Beräkna integralen $\iint_{\mathcal{P}} xy\,dA$, då $\mathcal{P}$ är parallellogrammet som begränsas av de fyra linjerna $y+x=1$, $y+x=2$, $y-x=3$, $y-x=4$. (4p)

Lösning (a): Förhållandet mellan Cartesiska och polära koordinater är

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Följdaktligen ges förhållandet mellan areaelementen av

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta,$$

där

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Så determinanten är $(\cos\theta)(r\cos\theta) - (-r\sin\theta)(\sin\theta) = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$, som medför att $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$, v.s.v.

Lösning (b): Det är enklast att skriva med matriser. Transformationen mellan $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$ ges av $\mathbf{u} = A\mathbf{x}$, där $\mathbf{u} = [u\ v]^T$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{x} = [x\ y]^T$. Å ena sidan har vi $du\,dv = |\det(A)|\,dx\,dy = 2\,dx\,dy$, så $dx\,dy = \frac{1}{2}\,du\,dv$. Å andra s idan ges inverstransformationen av $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{u}$, som leder till $x = \frac{1}{2}(u - v)$, $y = \frac{1}{2}(u + v)$. Allt detta innebär att integralen kan skrivas om i termer av u och v och är

$$\frac{1}{8}\int_3^4\int_1^2 (u^2 - v^2)\,du\,dv = \cdots = -\frac{5}{4}.$$

7. (a) Formulera Stokes sats. (2p)

(b) Kontrollera att satsen stämmer för vektorfältet $\mathbf{F} = y^5\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^4\mathbf{k}$ och ytan $\mathcal{S}$ som är den del av $z = x^2 + y^2$ under planet $z = 1$. Dvs beräkna båda leden i satsen och visa att de är lika. (4p)

Lösning (a): Sats 16.5.10 i boken.

Lösning (b): Vi beräknar först flödesintegralen

$$\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F})\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS.$$

Man kan kolla att $\nabla \times \mathbf{F} = (3x^2 - 5y^4)\mathbf{k}$. Ytan är en del av funktionsytan $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, så $\hat{\mathbf{N}}\,dS = \pm(-f_x, -f_y, 1) = \pm(-2x, -2y, 1)$. Det är faktiskt minus tecknet som stämmer ty det är klart att den utgående normalen har en negativ lutning i z-led. Så ytintegralen blir

$$\iint_{\overline{\mathcal{S}}} (5y^4 - 3x^2)\,dx\,dy,$$

där $\overline{\mathcal{S}}$ är projektionen av $\mathcal{S}$ på xy-planet, som är just enhetsskivan $x^2 + y^2 \leq 1$. Det är naturligt därför att byta till polära koordinater, som leder till integralen

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (5r^4\sin^4\theta - 3r^2\cos^2\theta)\,r\,dr\,d\theta = \cdots = \frac{5}{6}\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\,d\theta - \frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta.$$

De trigonometriska integralerna beräknas på samma vis som i Uppgift 4(a) och det visar sig att $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \pi$, $\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\,d\theta = 3\pi/4$. Insättning ger resultatet $-\pi/8$ för flödesintegralen.

Näst beräknar vi kurvintegralen

$$\oint_{\delta\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}.$$

Randen till $\mathcal{S}$ är cirkeln $x^2 + y^2 = z = 1$, orienterad medurs sett uppifrån, ty $\mathcal{S}$ ligger under randen och ska hållas till vänster om randen. Om vi skulle gå moturs i stället så paramteriseras cirkeln med

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad z = 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

så

$$\mathbf{F} = (y^5, x^3, z^4) = (\sin^5\theta, \cos^3\theta, 1),$$

för en medurs rotation

$$d\mathbf{r} = -(dx, dy, dz) = (\sin\theta, -\cos\theta, 0)$$

och kurvintegralen blir

$$\int_0^{2\pi} (\sin^6\theta - \cos^4\theta)\, d\theta.$$

Man kontrollerar på liknade vis som innan att $\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\, d\theta = 3\pi/4$, $\int_0^{2\pi} \sin^6\theta\, d\theta = 5\pi/8$, så kurvintegralen blir $5\pi/8 - 3\pi/4 = -\pi/8$, precis som flödesintegralen, v.s.v.

8. (a) Definiera vad som menas med att en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är *differentierbar* i en punkt (a, b). (2p)

(b) Ge ett exempel som visar att även om de partiella derivatorna f_1 och f_2 existerar i en punkt (a, b) så behöver inte f vara differentierbar där. (3p)

(c) Vilken egenskap hos de partiella derivatorna f_1 och f_2 garanterar att f är differentierbar i punkten (a, b) ? (Obs! Det räcker att ange villkoret, du behöver inte bevisa något). (1p)

Lösning (a): Definition 5, Section 12.6 i boken.

Lösning (b), (c): Om de partiella derivatorna är kontinuerliga i en omgivning av punkten (a, b) så är f differentierbar i (a, b), se Sats 12.6.4. Så för ett motexmepel i del (b) behöver man en funktion vars partiella derivator existerar men är inte kontinuerliga i punkten (a, b). När de partiella derivatorna inte är kontinuerliga så behöver inte funktionen själv vara kontinuerlig heller, som definitivt skulle utesluta att den är differentierbar. Vi kan ta som ett exmepel i del (b) funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Eftersom $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ för alla x och y, så är båda partiella derivatorna lika med noll i punkten $(0, 0)$. Men f är inte ens kontinuerlig i $(0, 0)$ - se Exempel 2 i avsnitt 12.2 i boken för fler detaljer.

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 13/14

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1 \qquad\qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad\qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad\qquad \int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad\qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \;,\; 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \;,\; a \neq 0 \qquad\qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0 \qquad\qquad \int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \;,\; a \neq 0 \qquad\qquad \int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2014-01-15	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm huruvida var och en av följande två punktmängder i $\mathbb{R}^3$ är öppen/sluten/varken eller. Ge korta motiveringar för dina svar. (2p)

$$(i)\ \ 2 \leq z \leq 3 \qquad\qquad (ii)\ \ 0 < x^2 + y^2 < 1,\ z = 0.$$

Svar och motivering: (i) Mängden är sluten. Dess rand består av de två planen $z = 2$ och $z = 3$ som båda tillhör mängden.
(ii) Mängden är varken öppen eller sluten. Den är inte sluten ty hela cylindern $x^2 + y^2 = 1$ ingår i dess rand, men endast enhetscirkeln som utgör cylinderns skärning med planet $z = 0$ tillhör mängden själv. Den är inte heller öppen ty denna cirkel ligger inte i mängdens inre.

(b) En partikel rör sig längs kurvan $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (1+t)\mathbf{j}\,, 0 \leq t < \infty$. Skissa banan och indikera färdriktningen. I vilken punkt befinner sig partikeln då dess fart är 5 (l.e./s) ? (3p)

Lösning och skiss: Banan går till höger längs kurvan $y = \sqrt{x} + 1$, med startpunkt $(0, 1)$. Hastigheten är $\mathbf{r}'(t) = (2t, 1)$ så farten är $\sqrt{(2t)^2 + 1^2} = \sqrt{4t^2 + 1}$. Om farten är 5 så innebär det att $5 = \sqrt{4t^2 + 1}$, som medför att $t = \sqrt{6}$. Vid denna tidpunkt befinner sig partikeln i punkten $\mathbf{r}(\sqrt{6}) = ((\sqrt{6})^2, 1 + \sqrt{6}) = (6, 1 + \sqrt{6})$.

(c) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som ges av $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2+z)\mathbf{i}+\ln(y+z^2)\mathbf{j}+xyz\mathbf{k}$. Bestäm Jacobimatrisen $D\mathbf{F}$ i punkten $(1, -3, 2)$ och med hjälp av densamma bestäm ett approximativt värde för $\mathbf{F}(1.02, -2.99, 1.98)$. (3p)
Lösning: I allmänhet gäller

$$D\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{y+z^2} & \frac{2z}{y+z^2} \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}.$$

Vid punkten $(x, y, z) = (1, -3, 2)$ har vi alltså

$$D\mathbf{F}(1, -3, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Notera att $\mathbf{F}(1, -3, 2) = (3, 0, -6)$. Approximationen för $\mathbf{F}$ i den närliggande punkten ges sedan av

$$\mathbf{F}(1.02, -2.99, 1.98) \approx \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.01 \\ -0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.02 \\ -0.07 \\ -6.04 \end{bmatrix}.$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm de största och minsta värdena som antas av funktionen $f(x, y) = x^3 - xy + y^2$ i enhetskvadraten, dvs i området $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$. (6p)

Lösning: Vi kollar först de kritiska punkterna. Vid en kritisk punkt gäller

$$f_x = 0 \Rightarrow 3x^2 - y = 0,$$
$$f_y = 0 \Rightarrow -x + 2y = 0.$$

Dessa ekvationer har två lösningar, $(0, 0)$ och $(1/6, 1/12)$. Notera att den första punkten ligger på enhetskvadratens rand medan att den andra ligger i dess inre. Vi har $f(1/6, 1/12) = -1/432$. Näst kollar vi kvadratens rand, som består av 4 olika sträckor.

(a) längs sträckan mellan $(0, 0)$ och $(0, 1)$ så är $f(0, y) = y^2$ så minsta värdet är noll och största värdet är ett.

(b) längs sträckan mellan $(0, 1)$ och $(1, 1)$ så är $f(x, 1) = x^3 - x + 1$, som alltid ligger mellan noll och ett.

(c) längs sträckan mellan $(1, 1)$ och $(1, 0)$ så är $f(1, y) = 1 - y + y^2$, som alltid ligger mellan noll och ett.

(d) längs sträckan mellan $(1, 0)$ och $(0, 0)$ så är $f(x, 0) = x^3$, som alltid ligger mellan noll och ett.

Sammanlagt ser vi att det minsta värdet som antas av funktionen över hela kvadraten är $-1/432$ medan att det största värdet är 1.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2014-01-15	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm den totala massan hos ett triangulärt föremål vars hörn ligger i punkterna $(0,0)$, $(0,1)$ och $(2,1)$, om densiteten i en punkt (x,y) är e^{y^2}. (3p)

Lösning: Vi måste integrera densiteten över området. Det är viktigt att integrera m.a.p. x först. Detta ger

$$\int_0^1 dy \int_0^{2y} e^{y^2}\,dx = \int_0^1 2ye^{y^2}\,dy = \int_0^1 d(e^{y^2}) = e^{1^2} - e^{0^2} = e - 1.$$

(b) Betrakta det konservativa vektorfältet;

$$\mathbf{F} = (2x\sin(yz) + 3z^2 - y^2e^x)\mathbf{i} + (x^2z\cos(yz) - 2ye^x)\mathbf{j} + (x^2y\cos(yz) + 6xz)\mathbf{k}.$$

Bestäm en potential för $\mathbf{F}$ och beräkna $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$, där $\mathcal{C}$ är den raka sträckan från $(0,1,1)$ till $(1,0,1)$. (3p)

Lösning: Vi beräknar i tur och ordning

$$\int \mathbf{F}_1\,dx = x^2\sin(yz) + 3xz^2 - y^2e^x + C_1(y,z),$$
$$\int \mathbf{F}_2\,dy = x^2\sin(yz) - y^2e^x + C_2(x,z),$$
$$\int \mathbf{F}_3\,dz = x^2\sin(yz) + 3xz^2 + C_3(x,y),$$

som innebär att en potential är

$$\phi(x,y,z) = x^2\sin(yz) + 3xz^2 - y^2e^x.$$

Sedan är kurvintegralen lika med förändringen i potentialen, nämligen $\phi(1,0,1) - \phi(0,1,1) = 3 - (-1) = 4$.

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Låt $\mathbf{F} = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ och låt $\mathcal{C}$ vara övre halvan av enhetscirkeln $x^2+y^2=1$, orienterad medurs. Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ genom att...

(a) parametrisera halvcirkeln och utgå från definitionen av kurvintegral. (3p)

(b) använda Greens sats. (3p)

Lösning (a): Halvcirkeln har den naturliga parametriseringen $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $0 \le \theta \le \pi$. Eftersom vi integrerar medurs blir kurvintegralen

$$\int \mathbf{F}_1\,dx + \mathbf{F}_2\,dy = \int_\pi^0 (-\sin\theta)^3(\sin\theta\,d\theta) + (\cos\theta)^3(\cos\theta\,d\theta) = -2\int_0^\pi \sin^4\theta\,d\theta,$$

där vi har använt symmetri för ett förenkla integralen. Sedan tillämpar vi de trigonometriska identiteterna

$$\sin^2 A = \frac{1}{2}(1-\cos 2A), \quad \cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$$

och får

$$\sin^4\theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta.$$

Bara konstanten ger ett nollskilt bidrag till integralen av symmetriskäl. Slutligen är kurvintegralen lika med $-2 \times \frac{3\pi}{8} = -\frac{3\pi}{4}$.

Lösning (b): För att kunna tillämpa Greens sats direkt måste vi ha ett slutet område och integrera över dess rand moturs. Så vi väljer den slutna halvskivan $\mathcal{R}$ vars rand $\delta\mathcal{R}$ består av halvcirkeln, orienterad moturs, plus raksträckan från $(-1,0)$ till $(1,0)$. Greens sats säger att

$$\oint_{\delta\mathcal{R}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} \right) dx\, dy = 3 \iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Vi byter till polära koordinater och får

$$3 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2 (r\, dr) = \frac{3\pi}{4}.$$

Så kurvintegralen över $\delta\mathcal{R}$ är också $\frac{3\pi}{4}$. Notera dock att bidraget från raksträckan $(-1,0) \to (1,0)$ är noll ty där är $x = dy = 0$. Det betyder att $\frac{3\pi}{4}$ är lika med kurvintegralen över halvcirkeln orienterad moturs, så medurs blir det $-\frac{3\pi}{4}$ i stället, v.s.v.

5. Låt $\mathcal{R}$ vara området som ligger inuti både enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och halvkonen $z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}$.

(a) Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$ ut ur $\mathcal{R}$. (3p)

(b) Beräkna medelvärdet av z-koordinaten (dvs funktionen $f(x,y,z) = z$) på området $\mathcal{R}$. (3p)

Lösning (a): Det är enklast att använda divergenssatsen

$$\iint_{\delta\mathcal{R}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \nabla \bullet \mathbf{F}\, dV.$$

Vi har $\nabla \bullet \mathbf{F} = 2(x + y + z)$. Området $\mathcal{R}$ är symmetriskt kring både $x = 0$ och $y = 0$ så bara z-termen ger ett nollskilt bidrag till flödet, dvs $2 \iiint_{\mathcal{R}} z\, dV$. Området $\mathcal{R}$ parametriseras lättast med sfäriska koordinater:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/6.$$

Så flödet är

$$2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 (\rho\cos\phi)(\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta) = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/6} \cos\phi \sin\phi\, d\phi \int_0^1 \rho^3\, d\rho = 2 \times 2\pi \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Lösning (b): Medelvärdet av $f(x,y,z) = z$ på området $\mathcal{R}$ ges av formeln

$$\frac{\iiint_{\mathcal{R}} z\, dV}{\iiint_{\mathcal{R}} dV}.$$

Täljaren får vi direkt från del **(a)**, den är $\pi/16$. På samma vis är nämnaren lika med

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/6} \sin\phi\, d\phi \int_0^1 \rho^2\, d\rho = 2\pi \times \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{(2-\sqrt{3})\pi}{3}.$$

Så medelvärdet av z-koordinaten är $\frac{\pi/16}{(2-\sqrt{3})\pi/3} = \frac{3}{16(2-\sqrt{3})}$.