Tentamen

MVE085 Flervariabelanalys

2014-10-30 kl. 8:30-12:30

Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Elin Solberg, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

Tentamen på kursen består av tre delar; del 1 och del 2 av godkäntdelen samt överbetygsdelen. Denna deltenta täcker endast den första av dessa tre delar. För godkänt på tentamen som helhet krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas i samband med undervisningen senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Godkäntdelen, del 1

se uppgift 1 och 2 på nästa blad

Godkäntdelen, del 2

se uppgift 3,4 och 5 på blad tre

Överbetygsdelen

Se sista bladet.

Lycka till!
Dennis Eriksson

Formelblad för TMA043 och MVE085, 14/15

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2014-10-30	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående deluppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm riktningsderivatan $D_u f$ av funktionen $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - y^4$ i punkten $(1, 1)$ och riktningen $u = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$. (2p)

Lösning:$\nabla f = (f_x,\, f_y) = (3x^2 + 3y^2,\, 6xy - 4y^3)$ så $\nabla f(1,\, 1) = (6,\, 2)$. Sedan har vi

$$D_u f = \nabla f \cdot u = (6,\, 2) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{14}{\sqrt{5}}.$$

Svar: ....

(b) Uttryck $\frac{\partial}{\partial s} f(x, y)$ och $\frac{\partial^2}{\partial s^2} f(x, y)$ i termer av de partiella derivatorna till $f(x, y)$, där $x = e^s, y = s^2$. (3p)

Lösning: Enligt kedjeregeln är

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = f_x \cdot e^s + f_y \cdot 2s.$$

Sedan är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}(e^s f_x + (2s) f_y) = \frac{\partial}{\partial s}(e^s f_x) + \frac{\partial}{\partial s}(2s f_y). \tag{1}$$

Enligt produktregeln och kedjeregeln är

$$\frac{\partial}{\partial s}(e^s f_x) = e^s f_x + e^s(f_{xx}e^s + f_{xy}(2s)) = e^s f_x + e^{2s} f_{xx} + 2se^s f_{xy} \tag{2}$$

och på liknande vis är

$$\frac{\partial}{\partial s}(2s f_y) = 2f_y + 2s(f_{xy}e^s + f_{yy}(2s)) = 2f_y + 2se^s f_{xy} + 4s^2 f_{yy}. \tag{3}$$

Insättning av (3) och (2) in i (1) ger slutligen att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = e^s f_x + 2f_y + e^{2s} f_{xx} + 4se^s f_{xy} + 4s^2 f_{yy}.$$

Svar: ....

(c) Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara given av $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + yz, z^2 - e^x, 2yz^2)$. Bestäm Jacobimatrisen till $\mathbf{F}$ i punkten $(0, 1, 1)$ och använd den för att bestämma ett approximativt värde till $\mathbf{F}(0.01, 0.99, 1.02)$. (3p)

Lösning: Vi har

$$D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & z & y \\ -e^x & 0 & 2z \\ 0 & 2z^2 & 4yz \end{pmatrix},$$

så i punkten (0, 1, 1) gäller

$$D\mathbf{F}(0,\, 1,\, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi har $\mathbf{F}(0,\, 1,\, 1) = (1,\, 0,\, 2)$ så approximationen lyder

$$\mathbf{F}(0.01,\, 0.99,\, 1.02) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.03 \\ 2.06 \end{pmatrix}.$$

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + 4z^3$.

(a) Med hjälp av Lagranges multiplikatormetod, bestäm största och minsta värde av f på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 21$. (4p)

(b) Bestäm ekvationen till tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 7$ i punkten $(1, 1, 1)$. (2p)

Lösning: (a): Vi söker extremvärdena till $f(x,\, y,\, z)$ med bivillkoret $g(x,\, y,\, z) = 0$ där $g(x,\, y,\, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 21$. Lagranges metod ger ekvationerna

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = \lambda(2x), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad 6y^2 = \lambda(2y), \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad 12z^2 = \lambda(2z). \end{aligned}$$

Från dessa härleder vi flera fall: $\lambda = 0$ och $x = y = z = 0$, som inte uppfyller $g(0, 0, 0) = 0$. Sen får man göra en koll med flera fall, huruvida något av x, y eller z är 0 (som alla uppfyller de respektive ekvationerna som involverar dessa variabler). Det inses att $x = y = 0$ ger största lösningen i vilket fall bivillkoret ger att $0^2 + 0^2 + z^2 = 21$ och $z = \pm\sqrt{21}$. Så vi har två kritiska punkter, $\pm(0,\, 0,\, \sqrt{21})$. Det är klart att det största värdet är $f(0,\, 0,\, \sqrt{21}) = 4\sqrt{21}^3$ och det minsta är $f(0,\, 0,\, -\sqrt{21}) = -4\sqrt{21}^3$.

(b): En normal till tangentplanet ges av

$$\mathbf{n} = \nabla f = (f_x,\, f_y,\, f_z) = (3x^2,\, 6y^2,\, 12z^2) \overset{(1,1,1)}{=} (3,\, 6,\, 12).$$

Tangentplanets ekvation lyder

$$\mathbf{n} \cdot (x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0) = 0 \Rightarrow (3,\, 6,\, 12) \cdot (x - 1,\, y - 1,\, z - 1) = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x + 2y + 4z = 7.$$

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2014-10-30	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

Till två följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper.
Motivera och förklara så väl du kan.

3. Beräkna $\int_{\mathcal{C}} y^2 dx + x dy$ över randen $\mathcal{C}$, med moturs orientering, till högra halvan av disken med centrum i origo och med radie 1, dvs. randen till området $x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0$, genom att

(a) parametrisera randen och räkna ut kurvintegralen. (3p)

(b) använda Greens sats. (2p)

Lösning (a): Vi delar upp randen i två delar, $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$, där $\mathcal{C}_1$ är högra halvan av enhetscirkeln, orienterad moturs, och $\mathcal{C}_2$ är raksträckan från (0, 1) till (0, −1). På $\mathcal{C}_2$ har vi $x = dx = 0$ så kurvintegralen längs $\mathcal{C}_2$ är noll. För $\mathcal{C}_1$ har vi parametriseringen $x = \cos t$, $y = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Således är

$$\oint_{\mathcal{C}} y^2\,dx + x\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 t)(-\sin t\,dt) + (\cos t)(\cos t\,dt) = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 t\,dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt.$$

Den första integralen är noll ty integranden är en udda funktion av t. För den andra substituerar vi $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ och får såsmåningom att integralen blir $\pi/2$.
Svar: $\pi/2$.

(b): Kurvintegralen är $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ med $\mathbf{F} = (F_1, F_2) = (y^2, x)$. Enligt Greens sats har vi

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_D (1 - 2y)\,dx\,dy,$$

där D är högra halvan av enhetsskivan. Området D är symmetrisk kring $y = 0$ så integralen av $-2y$ blir noll. Så vi har kvar endast $\iint_D 1\,dx\,dy = \text{Area}(D) = \pi/2$.

4. Betrakta sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ och halvkonen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Beräkna arean av den del av sfären som ligger innanför halvkonen. (2p)

(b) Beräkna flödet in genom det område som begränsas av sfären och konen av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2 + \frac{x^3}{3} + e^{yz}, x \ln z + yz^2, xz + \sin(xy)).$$

(3p)

Lösning (a): På sfären har vi att areaelementet är $dS = a^2 \sin\phi\,d\phi\,d\theta$. Området som begränsas av halvkonen ges av $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Således är dess area

$$\iint dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} a^2 \sin\phi\,d\phi\,d\theta = \cdots = a^2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)\,\pi.$$

(b): Vi använder Gauss divergenssats. Vi har

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = (y^2 + x^2) + z^2 + x = (x^2 + y^2 + z^2) + x.$$

Området är symmetriskt kring z-axeln så integralen av x kommer att vara noll. Sedan byter vi till sfäriska koordinater och får att flödet ut blir

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\,dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^a \rho^2\,(\rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta) = \cdots = \frac{a^5\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{5}\pi.$$

5. Till nedanstående deluppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna $\iint_D \frac{1}{x}\cos(\frac{y}{x})dA$ över området D i planet som begränsas av $y = x$ och $y = x^2$. (3p)

Lösning: Kurvorna skär varandra i (0, 0) och (1, 1). Det är nödvändigt att först integrera m.a.p. y. Således får vi

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \int_{x^2}^{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \left[x \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{x^2}^{x} =$$

$$= \int_0^1 (\sin 1 - \sin x)\,dx = [(\sin 1)x + \cos x]_0^1 = (\sin 1 + \cos 1) - (0 + 1) = \sin 1 + \cos 1 - 1.$$

Svar: ....

(b) Bestäm A så att $\mathbf{F} = (2z^3, 2yz^3, 6xz^2 + Ay^2z^2)$ blir virvelfritt, och ta fram en potential till detta $\mathbf{F}$. (3p)

Lösning: Lösning: $\mathbf{F}$ är virvelfritt om och endast om $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Vi har

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z^3 & 2yz^3 & 6xz^2 + Ay^2z^2 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = (2Ayz^3 - 6yz^3,\ 6z^2 - 6z^2,\ 0 - 0) = (2(A-3)yz^3,\ 0,\ 0)$$

så $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ om och endast om $A = 3$. Sedan hittar vi en potential genom att integrera:

$$\phi = \int F_1\,dx = 2xz^3 + C_1(y,\ z),$$

$$\phi = \int F_2\,dy = y^2z^3 + C_2(x,\ z),$$

$$\phi = \int F_3\,dz = 2xz^3 + y^2z^3 + C_3(x,\ y).$$

Dessa tre uttryck för ϕ blir konsekventa med varandra om vi väljer

$$\phi(x,\ y,\ z) = 2xz^3 + y^2z^3 + C.$$

Svar: ....

(c) Beräkna genom att sätta upp och räkna ut en upprepad trippelintegral volymen till den tetraeder som är begränad av: de positiva x, y, z-axlarna och $x+y+z=4$. (OBS: enbart referens till känd formel ger inga poäng). (2p)

Lösning: Volymen ges av

$$\int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy \int_0^{4-x-y} dz = \int_0^4 dx \int_0^{4-x} (4-x-y)\,dy =$$

$$= \int_0^4 dx \left[(4-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{4-x} = \int_0^4 \frac{(4-x)^2}{2}\,dx = \int_0^4 \frac{x^2}{2}\,dx = \cdots = \frac{32}{3}.$$

Svar: ....

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2014-10-30	sid.nummer	Poäng

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. En kurva ligger på snittet mellan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x^2 + 2z^2 = 1$.

(a) Parametrisera kurvan i första oktanten. (4p)

(b) Beräkna längden av hela kurvan. (2p)

Lösning: (a) I första oktanten är $x, y, z \geq 0$. Vi parametriserar först $x^2 + 2z^2 = 1$ som $x = \cos t, z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t)$, och det följer från ekvationerna att $y^2 = z^2$ så $y = \pm z = z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t)$. Här är $0 \leq t \leq \pi/2$.

(b) Längden är 8 gånger längden av kurvan i första oktanten. Den räknas ut som

$$\int_0^{\pi/2} ds = \int_0^{\pi/4} \sqrt{(-\sin t)^2 + \frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t}dt = \int_0^{\pi/2} dt = \pi/2.$$

Alltså är längden 4π.

7. Ett vektorfält ges av $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$.

(a) Skissa vektorfälten i planet. (2p)

(b) Lös fältlinjesekvationerna till $\mathbf{F}$ och rita ut en (ungefärlig) fältlinje. (4p)

Lösning: (a) Se sista sidan för en ungefärlig skiss, och tänkt speciellt på att längs linjen $x + y = C$ så är $F(x, y) = \mathbf{i} + C\mathbf{j}$.

(b) Fältlinjesekvationerna säger att $\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2}$, dvs.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x+y}.$$

Från detta får vi $dy = (x + y)dx$, så $\frac{dy}{dx} = y + x$. Detta är en icke-homogen differentialekvation som har partikulärlösning $y_p = -x - 1$, och homogen lösning $y_h = Ae^x$. Den allmänna lösningen ges alltså av $y = y_h + y_p = Ae^x - x - 1$. Se också sista sidan där jag har plottat $A = 0$ och $A = 1$.

8. (a) Formulera Stokes sats. (2p)

(b) Betrakta två linjer som korsar varandra i rymden som på i *Figur*, t.ex. $x + y = 0, z = 0$ och $x - y = 0, z = 0$. Vi har också sex stycken (enkelt slutna) kurvor $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ som på bilden med angiven orientering. Låt vidare $\mathbf{F}$ vara ett vektorfält som är definierat utanför linjerna, så att $\operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$ utanför linjerna. Vi är givna att $\int_{C_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 3, \int_{C_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 5, \int_{C_5} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 7$. Bestäm de tre arbetsintegralerna $\int_{C_3} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}, \int_{C_4} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ och $\int_{C_6} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$. (4p)

Lösning: (a) Se boken, kapitel 16.5, Theorem 10.

(b) Vi vet att om vi har en yta S med rand R, där $\mathbf{F}$ är definierad (eller definierad i en omgivning), så är

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}} dS = \int_R \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

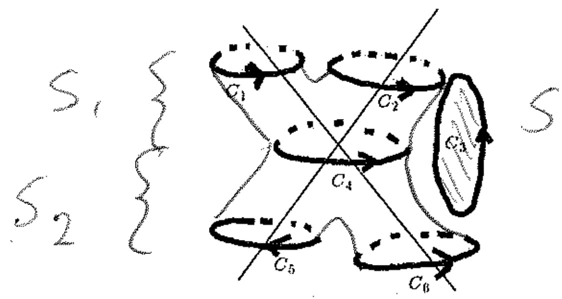
Eftersom nu curl är noll, så försvinner integralen. Eftersom vi kräver att $\mathbf{F}$ är definierad på ytan S kan ytan inte gå genom linjerna. I fallet med C_3 kan vi å andra sidan fylla i med en yta S som C_3 är randen till, så $\int_{C_3} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0$. Vi hittar också två nya ytor S_1 och S_2 genom att göra byxor som på bild. Då ser vi att, om vi har rätt orienteringar:

$$\int_{-C_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{C_4} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0$$

så $\int_{C_4} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 8$. På samma sätt får vi

$$\int_{-C_4} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{-C_5} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{C_6} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0$$

så $\int_{C_6} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 8 + 7 = 15$.



Figur

Uppgift 7