

Tentamen

MVE085 Flervariabelanalys

2014-10-30 kl. 8:30-12:30

Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Elin Solberg, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

Tentamen på kursen består av tre delar; del 1 och del 2 av godkäntdelen samt överbetygsdelen. Denna deltentamen täcker endast den första av dessa tre delar. För godkänt på tentamen som helhet krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas i samband med undervisningen senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Godkäntdelen, del 1

se uppgift 1 och 2 på nästa blad

Godkäntdelen, del 2

se uppgift 3,4 och 5 på blad tre

Överbetygsdelen

Se sista bladet.

Lycka till!
Dennis Eriksson

Formelblad för TMA043 och MVE085, 14/15

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x, y, z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2014-10-30	sid.nummer	Poäng
------------	---	------------	-------

Godkänddelen: del 1

1. Till nedanstående deluppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Bestäm riktningsderivatan $D_u f$ av funktionen $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - y^4$ i punkten $(1, 1)$ och riktningen $u = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$. (2p)

Lösning:

Svar:

- (b) Uttryck $\frac{\partial}{\partial s}f(x, y)$ och $\frac{\partial^2}{\partial s^2}f(x, y)$ i termer av de partiella derivatorna till $f(x, y)$, där $x = e^s, y = s^2$. (3p)

Lösning:

Svar:

- (c) Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara given av $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + yz, z^2 - e^x, 2yz^2)$. Bestäm Jacobi-matrisen till $\mathbf{F}$ i punkten $(0, 1, 1)$ och använd den för att bestämma ett approximativt värde till $\mathbf{F}(0.01, 0.99, 1.02)$. (3p)

Lösning:

Svar:

**Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper.
Motivera och förklara så väl du kan.**

2. Låt $f(x, y) = x^3 + 2y^3 + 4z^3$.

- (a) Med hjälp av Lagranges multiplikator metod, bestäm största och minsta värde av f på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 21$. (4p)
- (b) Bestäm ekvationen till tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 7$ i punkten $(1, 1, 1)$. (2p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2014-10-30	sid.nummer	Poäng
------------	---	------------	-------

Godkänddelen: del 2

Till två följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper.

Motivera och förklara så väl du kan.

3. Beräkna $\int_C y^2 dx + x dy$ över randen $\mathcal{C}$, med moturs orientering, till högra halvan av disken med centrum i origo och med radie 1, dvs. randen till området $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0$, genom att

(a) parametrisera randen och räkna ut kurvintegralen. (3p)

(b) använda Greens sats. (2p)

4. Betrakta sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ och halvkonen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Beräkna arean av den del av sfären som ligger innanför halvkonen. (2p)

(b) Beräkna flödet in genom det område som begränsas av sfären och konen av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2 + \frac{x^3}{3} + e^{yz}, x \ln z + yz^2, xz + \sin(xy)).$$

(3p)

5. Till nedanstående deluppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna $\iint_D \frac{1}{x} \cos(\frac{y}{x}) dA$ över området D i planet som begränsas av $y = x$ och $y = x^2$.

(3p)

Lösning:

Svar:

- (b) Bestäm A så att $\mathbf{F} = (2z^3, 2yz^3, 6xz^2 + Ay^2z^2)$ blir virvelfritt, och ta fram en potential till detta $\mathbf{F}$. (3p)

Lösning:

Svar:

- (c) Beräkna genom att sätta upp och räkna ut en upprepad trippelintegral volymen till den tetraeder som är begränsad av: de positiva x, y, z -axlarna och $x + y + z = 4$. (OBS: enbart referens till känd formel ger inga poäng). (2p)

Lösning:

Svar:

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2014-10-30	sid.nummer	Poäng
------------	---	------------	-------

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. En kurva ligger på snittet mellan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x^2 + 2z^2 = 1$.
- Parametrisera kurvan i första oktantan. (4p)
 - Beräkna längden av hela kurvan. (2p)
7. Ett vektorfält ges av $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$.
- Skissa vektorfälten i planet. (2p)
 - Lös fältlinjesekvationerna till $\mathbf{F}$ och rita ut en (ungefärlig) fältlinje. (4p)
8. (a) Formulera Stokes sats. (2p)
- (b) Betrakta två linjer som korsar varandra i rummet som på i *Figur*, t.ex. $x + y = 0, z = 0$ och $x - y = 0, z = 0$. Vi har också sex stycken (enkelt slutna) kurvor $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ som på bilden med angiven orientering. Låt vidare $\mathbf{F}$ vara ett vektorfält som är definierat utanför linjerna, så att $\text{curl } \mathbf{F} = 0$ utanför linjerna. Vi är givna att $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 3, \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 5, \int_{C_5} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 7$. Bestäm de tre arbetsintegralerna $\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ och $\int_{C_6} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (4p)

Lycka till igen!

