

1. a) $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ges

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} = \frac{2}{2 + 2x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Alltså

$$f'(0) = 1$$

b) $(g(x))^2(2x + g(x)) = 2$ deriveras implicit. Vi får

$$2g(x) \cdot g'(x)(2x + g(x)) + (g(x))^2(2 + g'(x)) = 0$$

Insättning $x=0$ ger $2(g(0))^2 g'(0) + 2(g(0))^2 + (g(0))^2 g'(0) =$

der $g'(0) = -\frac{2(g(0))^2}{3(g(0))^2} = -\frac{2}{3}$. Här observerar

vi att $g(0) \neq 0$ d. $(g(0))^3 = 2$ från $(g(x))^2(2x + g(x)) = 2$

Så: $f'(0) = 1$, $g'(0) = -\frac{2}{3}$

2. $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ Definitionsmängd $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x^2}{2} \frac{3(x+1) - 2x}{(x+1)^3} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

der $D_{f'} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Det gäller $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$ eller $x=-3$

Tecknstudium

x	-3	-1	0
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

$$f(-3) = -\frac{27}{8}$$

Vi ser att f har ett lokalt max för $x=-3$ och en terrasspunkt för $x=0$. Vidare gäller

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

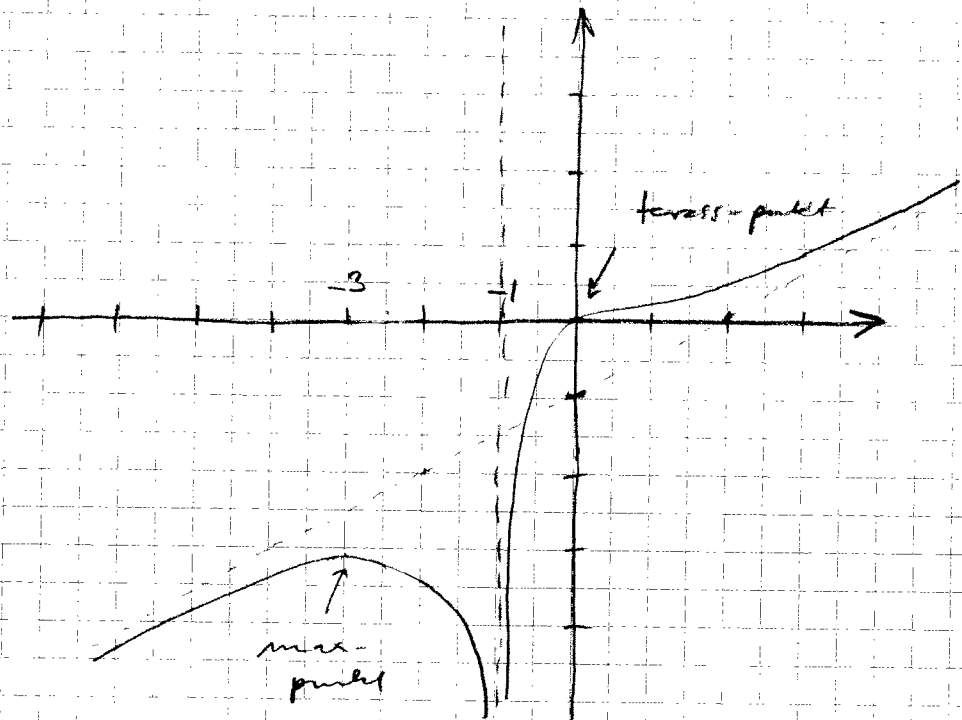
Polynomdivision ges

$$\frac{x^3}{2(x+1)^2} = \frac{x}{2} + \frac{x^3 - x(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \frac{x}{2} + \frac{-2x^2 + x}{2(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x}{2} - 1 + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty$$

Also $y = \frac{x}{2} - 1$ ist ein linear asymptotisch oder $x = -1$ ist eine vertikale asymptotisch

Figure



3. a) $f(x) = (\sin x^3)^3$ hier gilt $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + O(t^5)$
oder allgemein

$$\sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{6} + O(x^{15})$$

oder für

$$(\sin(x^3))^3 = \left(x^3 - \frac{x^9}{6} + O(x^{15})\right)^3 = x^9 \left(1 - \frac{x^6}{6} + O(x^{12})\right)^3 = x^9 + O(x^{15})$$

Deswegen muss $f(x) = (\sin(x^3))^3$ gelten

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9 + O(x^{10})$$

Also gilt $1 = \frac{f^{(9)}(0)}{9!}$ das $f^{(9)}(0) = 9!$

b) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ gilt

$$\frac{e^x - 1 - ax}{e^x - 1 - bx} = \frac{(1-a)x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)}{(1-b)x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)}$$

Fall 1: $b \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - ax}{e^x - 1 - bx} = \frac{1-a}{1-b}$$

Fall 2: $b = 1$

Für alle Grenzwert der existiert
muss $a = 1$ Grenzwert $\lim 1$.

Son: a) $f^{(9)}(0) = 9!$ b) gränsvärdet existerar då $b \neq 1$
 eller $b=1$ och $a=1$
 gränsvärdet är $\frac{a-1}{b-1}$ respektive 1

4. a) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

Kar. polynom $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2$ ges $y_h(x) = (A+Bx)e^{2x}$

Ansikt partiallösning $y_p(x) = P(x)e^{2x}$ där $P(x)$ polynom

Insättning i differentialekvationen ges

$$(P'' + 4P' + 4) e^{2x} - 4(P' + 2) e^{2x} + 4P e^{2x} = e^{2x}$$

där $P'' + (4-4)P' + (4-8+4)P = 1$, där $P''(x) = 1$

Detta ges $P(x) = \frac{x^2}{2} + Cx + D$ där C, D kan väljas = 0

Lösningen ges nu av $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A+Bx + \frac{x^2}{2})e^{2x}$

b) $z^4 - 4z^3 + 3z^2 + 8z - 10 = 0$ har en rot $z_1 = 2+i$.

Reella koefficienter ges $z_2 = \bar{z}_1$, är en rot. Följaktligen

ges $(z-z_1)(z-z_2) = (z-2)^2 + 1$ delar $z^4 - 4z^3 + 3z^2 + 8z - 10$.

Polynomdivision:

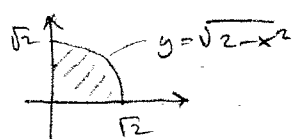
$$\begin{array}{r} z^2 - 4z + 5 \overline{) z^4 - 4z^3 + 3z^2 + 8z - 10} \\ \underline{z^4 - 4z^3 + 5z^2} \\ -2z^2 + 8z - 10 \\ \underline{-2z^2 + 8z - 10} \\ 0 \end{array}$$

Altså $z_{3,4} = \pm \sqrt{2}$

Son: a) $y(x) = (A+Bx + \frac{x^2}{2})e^{2x}$ b) $2 \pm i, \pm \sqrt{2}$

5. a) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx = \left\{ x = \sqrt{2} \sin t \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cos t \cdot \sqrt{2} \cos t dt =$
 $= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \left\{ \cos^2 t = \frac{1}{2} (\cos 2t + 1) \right\} =$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2t) + 1) dt = \left[\frac{1}{2} \sin(2t) + t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

alt



huvudkvadranten
 arean är $\frac{1}{4} \cdot \pi (\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2}$.

b) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = \left\{ t = \sqrt{x}, dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \right\} =$
 $= \int \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \arctan t + C = 2 \arctan(\sqrt{x}) + C$

Son: a) $\frac{\pi}{2}$ b) $2 \arctan \sqrt{x} + C$