Lösningsförslag till MVE045 den 21/10 2008

1) a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2)}{2+\ln x}$

Lösning: $\dfrac{\ln(x^2)}{2+\ln x} = \dfrac{2\ln x}{2+\ln x} = \dfrac{2}{1+\frac{2}{\ln x}} \to 2, \ x\to\infty$

då $\ln x \to +\infty$ då $x\to\infty$

Svar: 2

b) Derivera $-\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{x+2}{x\sqrt3}$ och förenkla

Lösning: Kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{x+2}{x\sqrt3}\right) = -\frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x+2}{x\sqrt3}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot x\sqrt3-(x+2)\sqrt3}{(x\sqrt3)^2} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{3x^2}{3x^2+(x+2)^2}\cdot\frac{-2\sqrt3}{3x^2} = \frac{4}{3x^2+x^2+4x+4} =$$

$$= \frac{1}{x^2+x+1}$$

Svar: $\dfrac{1}{x^2+x+1}$

2) "Rita grafen" till $f(x) = \sqrt{|x^2-x|}+\sqrt{|x^2+x|}$

Lösning: $D_f = \mathbb{R}$. Vi noterar att

$$x^2+x = x(x+1) = \begin{cases} >0 & x>0 \text{ eller } x<-1 \\ 0 & x=0,\ x=-1 \\ <0 & -1<x<0 \end{cases}$$

$$x^2-x = x(x-1) = \begin{cases} >0 & x>1 \text{ eller } x<0 \\ 0 & x=0,\ x=1 \\ <0 & 0<x<1 \end{cases}$$

Vi ser att $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ med

$$f'(x) = \frac12\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}\cdot(2x-1)+\frac12\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\cdot(2x+1) \qquad 1<x$$

$$= \frac12\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\cdot(1-2x)+\frac12\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\cdot(2x+1) \qquad 0<x<1$$

$$= \frac12\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}\cdot(2x-1)+\frac12\frac{1}{\sqrt{-x-x^2}}(-2x-1) \qquad -1<x<0$$

$$= \frac12\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}\cdot(2x-1)+\frac12\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}(2x+1) \qquad x<-1$$

Här framgår att $f'(x)<0$ för $x<-1$, $f'(x)>0$ för $x>1$ samt $f'(x)=0 \iff x=\pm\frac{\sqrt3}{2}$ (liten kalkyl)

Teckenstudium

x		-1		$-\frac{\sqrt3}{2}$		0		$\frac{\sqrt3}{2}$		1	
$f'(x)$	$-$	≷	$+$	0	$-$	≷	$+$	0	$-$	≷	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗		↘		↗

Vidare gäller $f(x) \to +\infty$ då $x \to \pm\infty$.

Vi får att f har lokalt minimum för $x = \pm 1$ och $x = 0$

$f(0) = 0$, $f(\pm 1) = \sqrt{2}$

och f har lokalt maximum för $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$f\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3}-3} + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3}+3}$$

Vertikala asymptoter saknas.

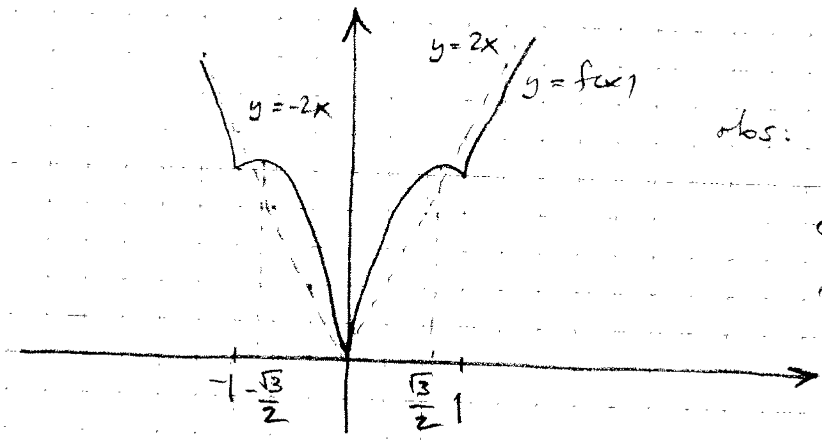
Sned asymptoter:

$$x \to +\infty: \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2+x} = x\left(\sqrt{1-\tfrac{1}{x}} + \sqrt{1+\tfrac{1}{x}}\right) =$$
$$= x\left(1 - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{x} + 1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{x} + O\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\right) =$$
$$= 2x + O\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

$$x \to -\infty: \quad f(x) = |x|\left(\sqrt{1-\tfrac{1}{x}} + \sqrt{1+\tfrac{1}{x}}\right) = -2x + O\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

Alltså $y = 2x$ sned asymptot då $x \to \infty$

och $y = -2x$ sned asymptot då $x \to -\infty$.



obs: $f(x)$ är en jämn funktion man kan nöja sig med att studera $x \geq 0$

3) a) Utveckla $e^{x^2} \cdot \cos x$ i potenser av x med restterm $O(x^8)$

Lösning: $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + O(t^4)$ ger med $t = x^2$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + O(x^8).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + O(x^8)$$

Detta ger

$$e^{x^2}\cdot \cos x = \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + O(x^8)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + O(x^8)\right) =$$
$$= 1 + \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)x^2 + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{24}\right)x^4 + \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{720}\right)x^6 +$$
$$+ O(x^8) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{31}{720}x^6 + O(x^8)$$

Svar: $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{31}{720}x^6 + O(x^8)$.

b) Beräkna $\lim_{x\to 0} x^{-5}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt - x + \frac{1}{3}x^3\right)$

Lösning: $e^s = 1 + s + \frac{s^2}{2} + O(s^3)$ ger med $s = -t^2$

$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} + O(t^6)$. Detta implicerar

$\int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^x (1 - t^2 + \frac{t^4}{2} + O(t^6))\,dt =$

$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + \int_0^x O(t^6)\,dt$

Alltså gäller

$x^{-5}\cdot\left(\int_0^x e^{-t^2}dt - x + \frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{10} + x^{-5}\int_0^x O(t^6)\,dt$

Men $|O(t^6)| \le C|x|^6$ för $|t| \le |x|$ (där C är en konstant)

så $\lim_{x\to 0} x^{-5}\int_0^x O(t^6)\,dt = 0$.

Svar: $\frac{1}{10}$

4) a) Lös $(4-3i)z^2 - 25z + 31 - 17i = 0$

Lösning: $-\frac{25}{4-3i} = -\frac{25(4+3i)}{25} = -4-3i$

$\frac{31-17i}{4-3i} = \frac{(31-17i)(4+3i)}{25} = 7+i$

Kvadratkomplettering ger

$z^2 + (-4-3i)z + 7 + i = (z - 2 - \frac{3}{2}i)^2 - (-2-\frac{3}{2}i)^2 + 7 + i =$

$= (z - 2 - \frac{3}{2}i)^2 + \frac{21}{4} - 5i = 0$

Sätt $a + ib = z - 2 - \frac{3}{2}i$, $a, b \in \mathbb{R}$

Vi får

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -\frac{21}{4} \\ 2ab = 5 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{(-\frac{21}{4})^2 + 5^2} = \frac{1}{4}\sqrt{841} = \frac{29}{4} \end{cases}$$

Detta ger $a^2 = \frac{1}{2}\cdot(\frac{29}{4} - \frac{21}{4}) = 1$ dvs $a = \pm 1$

och alltså $b = \frac{5}{2a} = \pm\frac{5}{2}$. $z = a + 2 + i(b + \frac{3}{2})$ ger

Svar: $3+2i$, $1-i$

b) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 10$

Lösning: Kar. ekv $r^2 - 2r + 10 = 0$.

$r^2 - 2r + 10 = (r-1)^2 + 9 = (r-1)^2 - (3i)^2 = (r-1+3i)(r-1-3i)$

Den allmänna homogenlösningen ges av

$y_h(x) = Ae^x\cos(3x) + Be^x\sin 3x$

Begynnelsevillkoren

$\begin{cases} y(0) = 1 & \text{ger} \quad A = 1 \\ y'(0) = 10 & \text{ger} \quad A + 3B = 10 \end{cases}$ dvs $\begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \end{cases}$

Svar: $y(x) = e^x\cos(3x) + 3e^x\sin(3x)$

5) a) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

Lösning: $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx =$

$= \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \{t = x+1,\ dt = dx\} =$

$= \int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$

$= \arctan t + C = \arctan(x+1) + C$

Svar: $\arctan(x+1) + C$

b) $\int_{-1}^{1} \frac{x+x^2}{\sqrt{1+x^6}}\,dx$

Lösning:

$\frac{x}{\sqrt{1+x^6}}$ udda funktion med för $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^6}}\,dx = 0$

$\frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}$ jämn funktion med för $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}\,dx$

Det gäller

$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}\,dx = \{t = x^3,\ dt = 3x^2dx,\ x = 0 \leftrightarrow t = 0,\ x = 1 \leftrightarrow t = 1\} =$

$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{3}\ln|t + \sqrt{t^2+1}|\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ln(1+\sqrt{2}).$

Svar: $\frac{2}{3}\ln(1+\sqrt{2})$