Lösningsförslag till MVE045, den 24/8 2007 — prel

1) a) Beräkna $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+\frac{1}{n^2}}$

Lösning: $\sqrt[n]{2+\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n}\ln\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} \longrightarrow e^0 = 1, \quad n\to\infty$

Svar: 1

b) Derivera $(\ln x)^{1-x}$

Lösning: $\frac{d}{dx}(\ln x)^{1-x} = \frac{d}{dx} e^{(1-x)\ln(\ln x)} =$

$$= (\ln x)^{1-x}\cdot\left[-\ln(\ln x) + (1-x)\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right] =$$

$$= (\ln x)^{-x}\left[\frac{1-x}{x} - \ln x \cdot \ln(\ln x)\right]$$

Svar: $(\ln x)^{-x}\left[\frac{1-x}{x} - \ln x\cdot\ln(\ln x)\right]$.

2) Rita grafen till $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

Lösning: $D_f = \{x\in\mathbb{R} : x\neq 1\}$ Derivatan av $f(x)$ är

$$f'(x) = \frac{3x^2}{(x-1)^2} - 2\frac{x^3}{(x-1)^3} = \frac{3x^2(x-1)-2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

med $D_{f'} = D_f$. Vi får att $f'(x)=0$ omm $x=0$ eller $x=3$

Teckenstudium

x		0		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$\wr$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\wr$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$
		terrass-punkt				lokalt min	

Vertikal asymptot: $x=1$ då $f(x)\to+\infty$ då $x\to 1\pm$

Sned asymptot: Polynomdivision ger

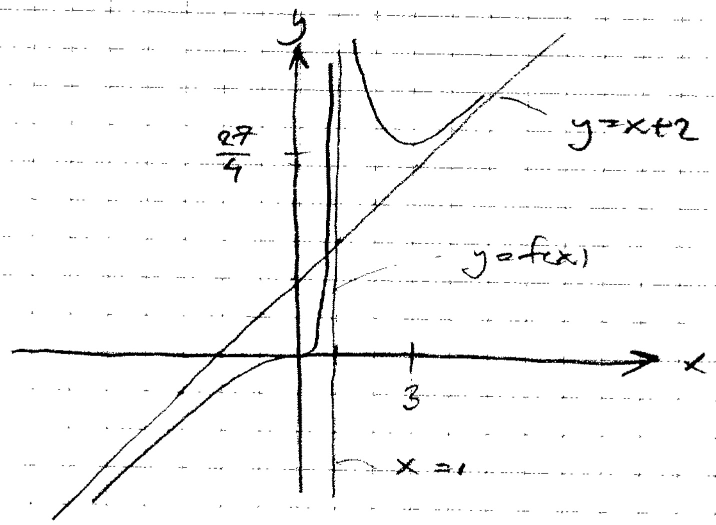
$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ \hline (x-1)^2 = x^2-2x+1 & x^3 \\ & \underline{x^3-2x^2+x} \\ & 2x^2 - x \\ & \underline{2x^2-4x+2} \\ & 3x-2 \end{array}$$

, dvs

$$f(x) = x+2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

och alltså $y = x+2$ sned asymptot då $x\to\pm\infty$.

Vidare gäller $f(x)\to+\infty$ då $x\to+\infty$ och $f(x)\to-\infty$ då $x\to-\infty$.



3) a) Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(x+1)-x}$

Lösning: Maclaurinutvecklingar ger

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$

$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$

och alltså $\frac{1-\cos x}{\ln(x+1)-x} = \frac{\frac{x^2}{2}+O(x^4)}{-\frac{x^2}{2}+O(x^3)} \to -1, \ x\to 0$

Svar: -1

b) Utveckla $e^{\cos x}$ i polynom av x till resttermen $O(x^6)$

Lösning: Maclaurinutvecklingar ger

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) \qquad x\to 0$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4) \qquad t \to 0$

Vi får

$$e^{\cos x} = e^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6)} = e\cdot e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6)} =$$

$$= e\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + O(x^6)\right) =$$

$$= e\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4\right) + O(x^6).$$

Svar: $e\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4\right) + O(x^6)$.

4) Hur många reella rötter har ekv. $x^3+3x^2+15x+25=0$?

Lösning: Då ekv. har reella koefficienter är antalet 1 eller 3. Studera grafen till $g(x)=x^3+3x^2+15x+25$

$g'(x) = 3x^2+6x+15 = 3(x+1)^2+12 > 0$

$g(x) \to \pm\infty$ då $x\to\pm\infty$ och $g(x)$ strängt växande

Alltså gäller $g(x)=0$ för exakt ett $x\in\mathbb{R}$

Svar: 1 rot

b) Lös $y''+4y'+29y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=15$

Lösning: Kar. ekv $r^2+4r+29=0$. Vi får

$$r^2+4r+29=(r+2)^2+5^2=(r+2+5i)(r+2-5i)$$

Detta ger $y_h(x)=Ae^{-2x}\cos(5x)+Be^{-2x}\sin(5x)$.

Vidare $y(0)=0$ ger $A=0$. $y'(0)=15$ ger $5B=15$

Vi får $y_h(x)=3e^{-2x}\sin(5x)$

Svar: $3e^{-2x}\sin(5x)$.

5) a) Bestäm samtliga primitiva funktioner till $e^{2x}\sin 3x$

Lösning. Partialintegrera

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin 3x-\int\frac{3}{2}e^{2x}\cos 3x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\left(\frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x+\int\frac{9}{4}e^{2x}\sin 3x\,dx\right)$$

Alltså

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\frac{1}{1+\frac{9}{4}}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x\right)+C=$$

$$=\frac{2}{13}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x+C$$

Svar: $\frac{2}{13}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x+C$

b) Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^3 x+\tan^4 x)\,dx$

Lösning:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\sin x\,dx=\{t=\cos x,\ dt=-\sin x\,dx$$

$$x=0\leftrightarrow t=1,\ x=\tfrac{\pi}{4}\leftrightarrow t=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\}=$$

$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{1-t^2}{t^3}\,dt=\left[-\frac{1}{2}t^{-2}-\ln t\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}=-\frac{1}{2}(1-2)-\ln(\sqrt{2})=$$

$$=\frac{1}{2}-\ln\sqrt{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^4 x\,dx=\{t=\tan x,\ dt=(1+\tan^2 x)\,dx,$$

$$x=0\leftrightarrow t=0,\ x=\tfrac{\pi}{4}\leftrightarrow t=1\}=$$

$$=\int_0^1 t^4\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_0^1\frac{t^4+t^2-t^2-1+1}{1+t^2}\,dt=$$

$$=\int_0^1\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t\right]_0^1=-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}$$

Svar: $\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} - \frac{1}{6}$.