

① a) i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x}$

Lösning: $\left| \frac{\sin(2x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$

Alltså $\frac{\sin(2x)}{x} \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$

Svar: 0

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} \sin\left(\frac{3}{x}\right)$

Lösning: $\left| \frac{x}{3} \sin\left(\frac{3}{x}\right) \right| \leq \frac{|x|}{3} \rightarrow 0, x \rightarrow 0$

Alltså $\frac{x}{3} \sin\left(\frac{3}{x}\right) \rightarrow 0, x \rightarrow 0$

Svar: 0

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x)^{\tan x}$

Lösning: $(\sin^2 x)^{\tan x} = e^{\ln[(\sin^2 x)^{\tan x}]} = e^{\frac{\sin x}{\cos x} \ln(\sin x)^2} =$

$= e^{\frac{2}{\cos x} \sin x \ln|\sin x|}$. Eftersom $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| = 0$ gäller

$\frac{2}{\cos x} \sin x \ln|\sin x| \rightarrow 0, x \rightarrow 0$, och då e^t kontinuerlig

funktion, $t \in \mathbb{R}$, gäller $(\sin^2 x)^{\tan x} \rightarrow e^0 = 1, x \rightarrow 0$. Svar: 1

b) Bestäm $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \lim_{x \rightarrow \infty} e^{ax} (\ln x)^b x^c = 0\}$

Lösning: Vi noterar att

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ då $a > 0$ samt att

$\ln x, x^a, a > 0, e^x \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$. Detta ger

svar: $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a < 0 \text{ och } b, c \in \mathbb{R}) \text{ eller}$

$(a = 0 \text{ och } c < 0 \text{ och } b \in \mathbb{R}) \text{ eller}$

$(a = c = 0 \text{ och } b < 0)\}$.

② a) $f(x) = \arctan(x^3) \quad f'(1)$

Lösning: $f'(x) = \frac{1}{1+(x^3)^2} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{1+x^6}$

Svar: $f'(1) = \frac{3}{2}$

b) $g(x) = (\ln|\sin x|)^3 \quad g'(\frac{\pi}{4})$

Lösning: $g'(x) = 3(\ln|\sin x|)^2 \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$

$g'(1) = 3(\ln(\frac{1}{\sqrt{2}}))^2 = 3(\frac{1}{2}\ln 2)^2 = \frac{3}{4}(\ln 2)^2$

Svar: $g'(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4}(\ln 2)^2$

c) $h(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0$ och $= 0, x = 0$. $h'(0)$

Lösning: Här ska användas definitionen

$h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Svar: $h'(0) = 0$

③ Rita grafen till $f(x) = (x-1) \cdot e^{\frac{1}{x}}$

Lösning:

$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

$\mathcal{D}_{f'} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, 1\}$ För $x \neq 0, 1$ gäller

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \left[1 + (x-1) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right] = \frac{e}{x^2} [x^2 - x + 1], & x > 1 \\ \frac{d}{dx} -(x-1)e^{\frac{1}{x}} = \dots = -\frac{e}{x^2} [x^2 - x + 1], & x < 1 \end{cases}$$

Kvadrattkomplettering ges $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$

och för $f'(x) \neq 0$ alla $x \in \mathcal{D}_{f'}$

Teckensstudium

x	0	1
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Av diagrammet

framgår att $x=0$

är en lok. minipunkt

Asymptoter:

$x=0$ är en vertikal asymptot då $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$

Vi noterar också att $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

Då $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$ saknas horisontella asymptoter

Såväl asymptoter:

Fallet $x \rightarrow +\infty$:

$$(x-1)e^{\frac{1}{x}} - x = x \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1) - e^{\frac{1}{x}} = \left\{ \text{Sätt } t = \frac{1}{x}, t \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \right.$$

$$x \rightarrow +\infty \left. \right\} = \frac{e^t - 1}{t} - e^t = \frac{e^t - e^0}{t} - e^t \rightarrow \frac{d}{dt} e^t \Big|_{t=0} - 1 =$$

$$= 0 \text{ då } t \rightarrow 0^+ \quad (\text{alt: Taylors utveckling})$$

Alltså $y=x$ är en sned asymptot då $x \rightarrow +\infty$

Fallet $x \rightarrow -\infty$:

P.s.s. inför att $y=-x$ är en sned asymp då $x \rightarrow -\infty$

Figur

