Lösningsförslag till MVE045, 2011-08-22 (kortfattade)

① a) Bestäm $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-x} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2^x}{\sqrt{x}} \longrightarrow \infty \text{ då } x \to \infty \qquad \underline{\text{Svar}}: \infty$$

b) Beräkna $\frac{d}{dx}(1+x^2)^{\sin x}$

$$\frac{d}{dx}(1+x^2)^{\sin x} = \frac{d}{dx} e^{\sin x \ln(1+x^2)} =$$

$$= e^{\sin x \cdot \ln(1+x^2)} \cdot \left(\cos x \cdot \ln(1+x^2) + \sin x \cdot \frac{2x}{1+x^2}\right) =$$

$$= (1+x^2)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln(1+x^2) + \sin x \cdot \frac{2x}{1+x^2}\right) \quad : \underline{\text{Svar}}$$

② "Rita grafen till $f(x) = \sqrt{x^2+x}$":

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$$

$$\mathcal{D}_{f'} = (-\infty, -1) \cup (0, \infty) \text{ där } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \cdot \frac{2x+1}{2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \cdot \left(x + \tfrac{1}{2}\right)$$

Teckenstudium:

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | ≸ | ≸ | ≸ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $0$ | | $0$ | $\nearrow$ |

Alltså, $f$ har globalt minimum för $x = 0$ och $x = -1$ där $f(0) = f(-1) = 0$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ så $f(x)$ kan endast ha sneda asymptoter. Vi ser att

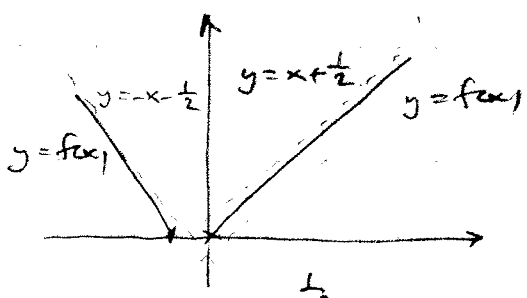
$$\sqrt{x^2+x} = |x|\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} = |x|\left(1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= |x| + \frac{1}{2}\frac{|x|}{x} + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{x}\right) =$$

$$= \begin{cases} x + \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{för } x > 0 \\ -x - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{för } x < 0 \end{cases}$$

Alltså fås $y = \pm\left(x + \tfrac{1}{2}\right)$ sneda asymptoter för $x \to \pm\infty$.

Med data ovan fås figuren




③ a) Beräkna $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$:

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right)} = e^{\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}+O(x^2)} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}\ , x \to 0$$ Svar: $\frac{1}{\sqrt{e}}$

b) Utveckla $e^{x^2}\sin x$ till $O(x^8)$:

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+O(t^4) \quad \text{ger} \quad e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}+O(x^8)$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+O(x^9)$$

Alltså fås

$$e^{x^2}\sin x = \left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}+O(x^8)\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+O(x^7)\right)=$$

$$= x+\left(-\frac{1}{6}+1\right)x^3+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^5+\left(-\frac{1}{5040}+\frac{1}{120}-\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)x^7+$$

$$+O(x^9) = x+\frac{5}{6}x^3+\frac{41}{120}x^5+\frac{461}{5040}x^7+O(x^8)$$ : Svar

(4) a) Lös $z^2-5z+7+i=0$:

Kvadratkomplettering ger $z^2-5z+7+i = (z-\frac{5}{2})^2+\frac{3}{4}+i$

sätt $z-\frac{5}{2} = a+ib$ där $a,b\in\mathbb{R}$. Detta ger

$(a+ib)^2 = -\frac{3}{4}-i$ dvs

$a^2-b^2 = -\frac{3}{4}$ och $2ab=-1$ men även (om vi

tar absolutbeloppet av båda sidor)

$$a^2+b^2 = \sqrt{(-\tfrac{3}{4})^2+(-1)^2} = \frac{5}{4}$$

Alltså $a^2 = \frac{1}{4}$ dvs $a = \pm\frac{1}{2}$

Då $2ab=-1$ fås $(a,b) = (\frac{1}{2},-1)$ eller $(-\frac{1}{2},1)$

Alltså fås $z = \frac{5}{2}\pm(\frac{1}{2}-i) = \begin{cases} 3-i \\ 2+i \end{cases}$ : Svar

b) Lös $y'+2xy = x^3$, $y(0)=1$:

Detta är en 1:a ordningens diff ekv som är linjär och

löses med integrerande faktor $e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$

Alltså $\frac{d}{dx}(e^{x^2}\cdot y(x)) = e^{x^2}x^3$. Integrering ger

$$e^{x^2}\cdot y(x) = \int e^{x^2}x^3\,dx = \{PI\} = \frac{1}{2}e^{x^2}\cdot x^2 - \int e^{x^2}\cdot x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2}x^2 - \frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

Vi har $y(x) = \frac{x^2-1}{2}+Ce^{-x^2}$. där $y(0)=1$ ger $C=\frac{3}{2}$

Svar: $y(x) = \frac{x^2-1}{2}+\frac{3}{2}e^{-x^2}$

5 a) Bestäm alla primitiva funktioner till $\frac{x^3}{x^3+1}$:

$$\frac{x^3}{x^3+1} = 1 - \frac{1}{x^3+1} = 1 - \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Partialbråksuppdelning av sista termen

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

där $A = \frac{1}{3} = -B$, $C = \frac{2}{3}$

Vi har

$$\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx = \int\left(1 - \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2-x+1}\right)dx =$$

$$= x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \int \frac{\frac{1}{6}(2x-1) - \frac{1}{2}}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| - \int \frac{\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dx =$$

$$= x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2}\,dx =$$

$$= x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Svar

b) Beräkna $\int_1^4 x\arctan\sqrt{x-1}\,dx$:

$$\int_1^4 x\arctan\sqrt{x-1}\,dx = \{PI\} = \left[\frac{x^2}{2}\arctan\sqrt{x-1}\right]_1^4 -$$

$$- \int_1^4 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x-1})^2}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx =$$

$$= 8\arctan(\sqrt{3}) - \frac{1}{4}\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx;$$

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \left\{t = \sqrt{x-1} \text{ dvs } x = t^2+1,\ dx = 2t\,dt,\ x=1 \leftrightarrow t=0,\ x=4 \leftrightarrow t=\sqrt{3}\right\}$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int_0^{\sqrt{3}}(t^2+1)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2(\sqrt{3}+\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

Detta ger $\int_1^4 x\arctan\sqrt{x-1}\,dx = 8\arctan(\sqrt{3}) - \sqrt{3} =$

$= 8\cdot\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$.

Svar: $\frac{8}{3}\pi - \sqrt{3}$