Lösningsförslag till tentamen MVE045 den 18/10 2011

1) a) $\lim_{x\to\infty} x^x \cdot e^{-x^2}$

Lösning: $x^x \cdot e^{-x^2} = e^{x\ln x} \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2(1-\frac{\ln x}{x})} \to 0,\ x\to\infty$

eftersom $\underbrace{-x^2 \cdot \underbrace{(1-\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0})}_{\to 1}}_{-\infty \text{ då } x\to\infty}$ och $e^t \to 0$ då $t\to -\infty$

Svar: 0

b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + 2\arctan x \quad , x \geq 0$

Visa $f(x)$ är konstant och beräkna denna

Lösning: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} + 2\frac{1}{1+x^2} =$

$= \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} + \frac{2}{1+x^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{4x^2}} \cdot \frac{-4x}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \left(\frac{-4x}{2|x|}+2\right)\frac{1}{1+x^2} = 0$

för $x>0$. Vidare är $f(x)$ kontinuerlig för $x \geq 0$.

Alltså $f(x)$ är konstant för $x \geq 0$. Vidare gäller

$f(1) = \arcsin 0 + 2\arctan 1 = 0 + 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ Svar: $\frac{\pi}{2}$

2) $f(x) = \frac{x}{x-3}(x-|x|+2)$ "Rita grafen"

Lösning: ① $D_f = \{x\in\mathbb{R} : x \neq 3\} = (-\infty,3)\cup(3,\infty)$

② Eftersom $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-|x|+2}{x-3}\right) = -\frac{2}{3}$

och speciellt existerar gäller $D_{f'} = D_f$

För $x\in D_{f'}\setminus\{0\}$ gäller

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-3)^2}\cdot(2(x-3)-2x\cdot 1) = -\frac{6}{(x-3)^2}, & x>0 \\ \frac{1}{(x-3)^2}\cdot((4x+2)(x-3)-(2x^2+2x)\cdot 1) = \\ = \frac{2x^2-12x-6}{(x-3)^2}, & x<0 \end{cases}$$

Alltså $f'(x)=0 \iff x^2-6x-3=0 \ \&\ x<0$

$\iff x = 3\pm 2\sqrt{3} \ \&\ x<0$

$\iff x = 3-2\sqrt{3}$.

③ Teckentabell

x		$3-2\sqrt{3}$		0		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	∄	$-$
$f(x)$	↗		↘		↘	∄	↘

Vidare $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 3+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 3-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

④ Asymptoter

vertikal asymptot: Från ③ följer att $x=3$ är en vertikal asymptot

sned/horisontella asymptoter:

$x\to+\infty$: $f(x) = \frac{2x}{x-3} = 2 + \frac{6}{x-3}$ för $x>0$

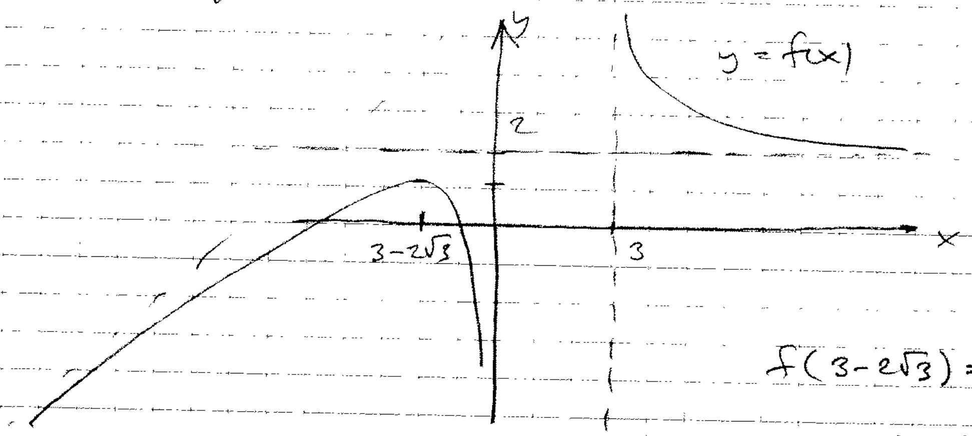
Alltså $y=2$ är horisontell asymptot i $x\to+\infty$

$x\to-\infty$: $f(x) = \frac{2x^2+2x}{x-3} = \frac{2x(x-3)+8(x-3)+24}{x-3} =$

$= 2x + 8 + \frac{24}{x-3}$, $x<0$

Alltså $y(x) = 2x+8$ är sned asymptot i $x\to-\infty$

⑤ Rita grafen



$$f(3-2\sqrt{3}) = \frac{2(3-2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}{-2\sqrt{3}} = 14-8\sqrt{3}$$

⑥ $f(x)$ saknar globalt max och min men har ett lokalt max i $x = 3-2\sqrt{3}$.

3) a) $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} & x\neq 0 \\ e & x=0 \end{cases}$ Avgör om $f'(0)$ existerar

Lösning: Vi vet att $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Alltså $f(x)$ är en kontinuerlig funktion.

$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ Vi noterar att

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{x}\left((1+x)^{\frac{1}{x}} - e\right) = \frac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} - e\right) =$

$= \frac{e}{x}\left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1} - 1\right)$

Standardutvecklingen $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ ger

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e}{x}\left(e^{\frac{1}{x}(x-\frac{x^2}{2}+O(x^3))-1} - 1\right) = \frac{e}{x}\left(e^{-\frac{x}{2}+O(x^2)} - 1\right)$$

Standardutvecklingen $e^t = 1+t+O(t^2)$, $t \to 0$, ger

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e}{x}\left(1+\left(-\frac{x}{2}+O(x^2)\right)+O(x^2)-1\right) = -\frac{e}{2}+O(x) \to -\frac{e}{2}, \ldots$$

Alltså $f'(0)$ existerar och $= -\frac{e}{2}$ Svar: $-\frac{e}{2}$

b) Utveckla $\sqrt{1+\sin x}$ i potenser av x med restterm på formen $O(x^4)$.

Lösning: Standardutvecklingarna

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

$$\sqrt{1+t} = 1+\frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2}t^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{6}t^3 + O(t^4) =$$

$$= 1+\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + O(t^4)$$

ger $\sqrt{1+\sin x} = \sqrt{1+x-\frac{x^3}{6}+O(x^5)} =$

$$= 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+O(x^5)\right) - \frac{1}{8}\left(x-\frac{x^3}{6}+O(x^5)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{16}\left(x-\frac{x^3}{6}+O(x^5)\right)^3 + O(x^4) =$$

$$= 1+\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{16}x^3 + O(x^4) =$$

$$= 1+\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + O(x^4)$$: Svar

4) a) z^4-3z^2-6z-2 har två nollställen vars kvot är i. Faktorisera polynomet

Lösning: Låt z_1, z_2 vara de nollställen till polynomet med $\frac{z_1}{z_2} = i$. Ansätt $z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$ där $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Då gäller $a+ib = i(c+id) = -d+ic$ och alltså $a=-d$, $b=c$

Vi har $z_1 = a+ib$, $z_2 = b-ia$. Två fall uppkommer

(I) $a=b$. Då gäller $z_2 = \overline{z_1} = a+ia$ och

$$(z-z_1)(z-z_2) = (z-a)^2+a^2 = z^2-2az+2a^2$$

delar polynomet

(II) $a \neq b$. Eftersom polynomet z^4-3z^2-6z-2 har reella koefficienter är $z_1, z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2}$ nollställen

och $(z-z_1)(z-z_2)(z-\overline{z_1})(z-\overline{z_2}) = (z^2-2az+a^2+b^2)\cdot$

$$\cdot(z^2-2bz+b^2+a^2) = z^4-(2a+2b)z^3+(2a^2+2b^2+4ab)z^2+$$

$-(2a+2b)(a^2+b^2)z + (a^2+b^2)^2 = z^4-3z^2-6z-2$

Alltså gäller

$2a+2b=0$, $2(a^2+b^2+2ab)=-3$,

$-2(a+b)(a^2+b^2)=-6$, $(a^2+b^2)^2=-2$

vilket är omöjligt.

Alltså måste $a=b$. Polynomdivision

$$\begin{array}{r|l} & z^2+2az+2a^2-3 \\ \hline z^2-2az+2a^2 & z^4-3z^2-6z-2 \\ & -(z^4-2az^3+2a^2z^2) \\ \hline & 2az^3-(2a^2+3)z^2-6z-2 \\ & -(2az^3-4a^2z^2+4a^3z) \\ \hline & (2a^2-3)z^2-(4a^3+6)z-2 \\ & -((2a^2-3)z^2-2a(2a^2-3)z+2a^2(2a^2-3)) \\ \hline & (-6a-6)z-2a^2(2a^2-3)-2 \end{array}$$

Detta ger $-6a-6=-2a^2(2a^2-3)-2=0$ dvs $a=-1$

Vi har $z^4-3z^2-6z-2=(z+1+i)(z+1-i)(z^2-2z-1)=$

$=(z+1+i)(z+1-i)((z-1)^2-2)=(z+1+i)(z+1-i)(z-1+i\sqrt{2})(z-1-i\sqrt{2})$

b) $xyy'=2(y+1)$. Bestäm lösningarna som uppfyller villkoren $y(-1)=1$ och $y(1)=-1$: Svar

Lösning: separabel diff.ekv. Vi noterar att $y=-1$ är en lösning. För $y\neq-1$ gäller $x\cdot\frac{y}{y+1}y'=2$.

För $x\neq0$ har vi

$$\left(1-\frac{1}{y+1}\right)y'=\frac{2}{x}$$

Detta ger $y-\ln|y+1|=2\ln|x|+C$. Omskrivningar

$\ln e^y-\ln|y+1|=\ln|x|^2+\ln C_1$, $C_1>0$ ger

$$\frac{e^y}{|y+1|}=|x|^2C_1 \qquad x\neq0$$ (obs olika konstanter för $x<0$ och $x>0$)

För $x<0$ har vi

$$\frac{e^y}{y+1}=x^2C_2 \quad \text{där } C_2\neq0$$

C_2 bestäms av $y(-1)=1$ dvs $C_2=\frac{e}{2}$

Vi får $\frac{e^{y(x)}}{y(x)+1}=\frac{e}{2}x^2$

Svar: $y = -1,\ x \in \mathbb{R}$, $e^{y(x)} = (y(x)+1)\frac{e}{2}x^2$, $x < 0$

5) a) samtliga primitiva funktioner till $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

Lösning:
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \quad dx = 2t\,dt \end{array} \right\} =$$
$$= \int \frac{1}{t+1}\,2t\,dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1}\right)dt =$$
$$= 2t - 2\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C \quad : \text{Svar}$$

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \sin(3x)\,dx$

Lösning: $\sin x \cdot \sin(3x) = \{\text{additionsformeln}\} =$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos(x-3x) - \cos(x+3x)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(2x) - \cos(4x)\right)$$

då $\cos x$ är jämn funktion
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cdot \sin(3x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\left(\cos(2x) - \cos(4x)\right)dx =$$
$$= \left[\frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{8}\sin(4x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) -$$
$$- \frac{1}{8}\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin(\pi)\right) = \frac{1}{4}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1\right) - \frac{1}{8}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 0\right) =$$
$$= \frac{3}{8}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{1}{4}$$

Svar: $\frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{1}{4}$