MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys IT2, MVE045, 2010-10-19, TID(8.30-12.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna, linjal och Beta, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Aron Lagerberg, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. (a) Bestäm om följande gränsvärde existerar och i så fall beräkna det:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^{e}.$$

(5p)

(b) Beräkna derivatan av funktionen

$$x^{x}\ln(x^2+1).$$

(5p)

2. Sätt $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$. Ange f:s definitionsmängd och dess derivata. Rita grafen till f samt ange samtliga asymptoter och extremvärden och extrempunkter.

(10p)

3. (a) Beräkna

$$\lim_{x\to\infty} x(e-(1+\frac{1}{x})^{x}).$$

(5p)

(b) Beräkna Taylorpolynomet av ordning 5 kring 0 för

$$f(x)=\frac{\ln(1+x^3)}{\cos x}.$$

(5p)

4. (a) Lös ekvationen

$$z^4+7z-12=0.$$

Ekvationen har en icke-reell rot med realdelen $\frac{1}{2}$.

(5p)

(b) För funktionen $f(x)$ gäller att $f(0)=1$ och $f'(x)+2xf(x)=x^3$. Beräkna det minsta värde som funktionen antar.

(5p)

5. (a) Bestäm samtliga primitiva funktioner till

$$\frac{x}{x^3-1}.$$

(5p)

(b) Området som begränsas av x-axeln och kurvan $y = x \ln x$ roterar kring y-axeln. Beräkna rotationskroppens volym.

(5p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! Peter

Tentamen i Matematisk analys IT2, MVE045, den 19/10 2010

① a) $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cdot x^{e} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^e}{e^x} = 0$ (standardgränsvärde)

Svar: 0

b) $\frac{d}{dx}\left(x^x \cdot \ln(x^2+1)\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln x}\cdot \ln(x^2+1)\right) =$

$= e^{x\ln x}\cdot\left(\ln x + \frac{x}{x}\right)\ln(x^2+1) + e^{x\ln x}\cdot \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x =$

$= x^x\cdot\left((\ln x+1)\ln(x^2+1) + \frac{2x}{x^2+1}\right)$

Svar: se uttrycket till vänster

② $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$ har definitionsmängden

$D_f = \{x\in\mathbb{R} : x^2-2x \geq 0\} = (-\infty, 0] \cup [2,\infty)$.

Derivera $f(x)$.

$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}\cdot(2x-2) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ $\quad x\in D_{f'} = (-\infty,0)\cup(2,\infty)$

Vi ser att

$f'(x) \neq 0$ för $x\in D_{f'}$.

Teckenstudium

x		0		2	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$		$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\searrow$				$\nearrow$

$\lim_{x\to 0-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 2+} f(x)$

För $x>2$ gäller $f(x) = x\sqrt{1-\frac{2}{x}} = x\cdot\left(1-\frac{1}{2}\frac{2}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$

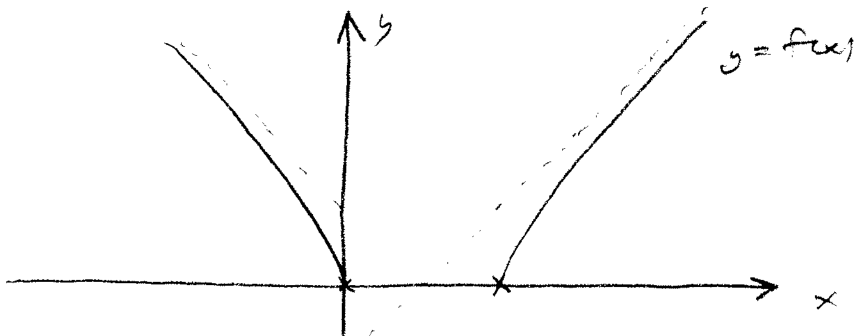
$= x-1+O\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\to+\infty$

För $x<0$ gäller $f(x) = -x\sqrt{1-\frac{2}{x}} = -x+1+O\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\to-\infty$

Detta ger att

$y = x-1$ sned asymptot då $x\to+\infty$

$y = -x+1$ — " — då $x\to-\infty$



$f(x)$ har inga lokala maxima men två lokala minima som också är globala minima: 0 i $x=0$ och $x=2$.

③ a) $\lim_{x\to\infty} x\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$.

$$e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e-e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e-e^{x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)} =$$

$$= e-e^{1-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)} = e\left(1-e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right) =$$

$$= e\left(1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) = \frac{e}{2x}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Alltså gäller

$$\lim_{x\to\infty} x\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = \frac{e}{2}$$

Svar: $\frac{e}{2}$

b) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^3)}{\cos x}$

$$\ln(1+x^3) = x^3+\mathcal{O}(x^6)$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^6)} = \frac{1}{1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^6)\right)} =$$

$$= 1+(-1)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^6)\right) + \frac{(-1)(-2)}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^6)\right)^2+\mathcal{O}(x^6) =$$

$$= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+\mathcal{O}(x^6) = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\mathcal{O}(x^6).$$

Detta ger

$$f(x) = \left(x^3+\mathcal{O}(x^6)\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\mathcal{O}(x^6)\right) =$$

$$= x^3+\frac{x^5}{2}+\mathcal{O}(x^6)$$

Taylorpolynomet av ordning 5 kring 0: $x^3+\frac{x^5}{2}$: Svar

④ a) $z^4+7z-12=0$ har rot $z_1=\frac{1}{2}+ia$. Då polynomekvationen har reella koefficienter är också $z_2=\frac{1}{2}-ia$ en rot.

Då är $(z-z_1)(z-z_2) = \left(z-\frac{1}{2}\right)^2+a^2 = z^2-z+\frac{1}{4}+a^2$ en faktor i $z^4+7z-12$. Polynomdivision ger

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2+z+\frac{3}{4}-a^2 \\
\hline
z^2-z+\frac{1}{4}+a^2 & z^4+7z-12 \\
 & z^4-z^3+(\frac{1}{4}+a^2)z^2 \\
\hline
 & z^3-(\frac{1}{4}+a^2)z^2+7z-12 \\
 & z^3-z^2+(\frac{1}{4}+a^2)z \\
\hline
 & (\frac{3}{4}-a^2)z^2+(7-\frac{1}{4}-a^2)z-12 \\
 & (\frac{3}{4}-a^2)z^2-(\frac{3}{4}-a^2)z+(\frac{1}{4}+a^2)(\frac{3}{4}-a^2) \\
\hline
 & (\frac{15}{2}-2a^2)z-12-(\frac{1}{4}+a^2)(\frac{3}{4}-a^2)
\end{array}$$

Alltså $a^2=\frac{15}{4}$ dvs $a=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

Vidare gäller $z^2+z-3=0$ dvs $z_{3,4} = -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+3} =$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

Svar: $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2} i$, $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

b) $\begin{cases} f'(x) + 2x f(x) = x^3 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

är en linjär 1:a ordningens diff-ekv. Integrerande faktor ges av e^{x^2}. Alltså

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2} f(x)\right) = x^3 e^{x^2}$$

$$e^{x^2} \cdot f(x) = \int x^3 e^{x^2} dx = \{ t = x^2, \ dt = 2x\,dx \} =$$

$$= \frac{1}{2} \int t e^t dt = \frac{1}{2}\left[t e^t - \int e^t dt \right] = \frac{1}{2}\left[t e^t - e^t + C \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C \right].$$

$f(0) = 1$ ger $C = 3$

Alltså $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + \frac{3}{2} e^{-x^2}$

Vi noterar att $f'(x) = x - 3x e^{-x^2} = x(1 - 3e^{-x^2})$ och

alltså $f'(x) = 0$ om och endast om $x = 0$ eller $e^{-x^2} = \frac{1}{3}$

dvs $x = 0$ eller $x = \pm\sqrt{\ln 3}$

x		$-\sqrt{\ln 3}$		0		$\sqrt{\ln 3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Alltså $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{2}(\ln 3 - 1) + \frac{3}{2} e^{-\ln 3} = \frac{\ln 3}{2}$

Svar: $\frac{\ln 3}{2}$

5) $\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+x+1}$

där $x = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$

dvs $(A+B)x^2 + (A - B + C - 1)x + (A - C) = 0$

Alltså

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 1 \\ A - C = 0 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{aligned} A &= \tfrac{1}{3} \\ B &= -\tfrac{1}{3} \\ C &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2+x+1} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{\frac{3}{2}}{x^2+x+1} \right) dx =$$

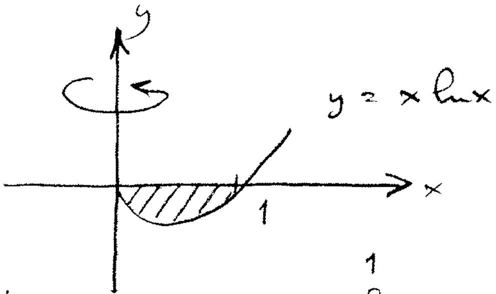
$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Svar: se ovan

b)



Sökta volymen $\int_0^1 2\pi x\,|x\ln x|\,dx = -2\pi\int_0^1 x^2\ln x\,dx =$

$$= -2\pi\left[\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right] =$$

$$= +2\pi\cdot\frac{1}{3}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2\pi}{9}$$

Svar: $\frac{2\pi}{9}$