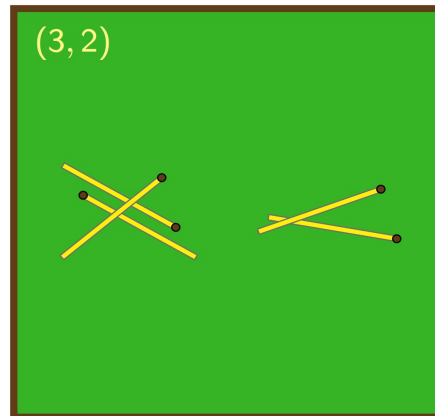


## Lite om kombinatoriska spel för kursen mve070, VT2014

För att illustrera vissa teoretiska moment från kursboken "Algebra och Diskret Matematik" kommer vi att spela några enkla 2-personers kombinatoriska spel. Dessa spel har med logik, mängdlära, funktioner, induktion och delbarhet att göra, så de exemplifierar kursen bra. När man spelar kanske man först inte tänker på hur matematiska spelen faktiskt är, eftersom de fungerar som de flesta andra spel; det gäller att vinna, "att komma först i mål". Spelen går ofta under samlingsnamnet "Nim-spel" (nim betyder "tag", som i att "ta bort något", på tyska), men kallas ibland även "Subtraktionsspel". Dessa spel är väldigt gamla. Man vet till exempel att de spelades i gamla Kina för flera tusen år sedan.

- 1) **Subtraktionsspelet "21":** Några av er har kanske redan som barn spelat detta spel och vet hur man gör för att vinna; berätta i så fall inte för kompisarna! Man spelar antingen med penna och papper, eller med en hög med mynt, tändstickor eller liknande. Reglerna är enkla: *två spelare turas om att ta bort antingen en eller två tändstickor från en hög, som vid spelets början har 21 stickor. Den som inte kan dra (på grund av att stickorna är slut) förlorar.* För enkelhetens skull döper vi spelarna till "Spelare 1" och "Spelare 2", där så klart Spelare 1 börjar. Frågan är hur man spelar som bäst. Kan man räkna ut vem som kommer att vinna redan innan första draget? Går det kanske till och med att bevisa matematiskt vad en vinnande strategi är? Om man spelar med penna och papper, så skriver man först talet 21 och den som drar första draget kan alltså välja mellan att subtrahera 1 eller 2 från det givna talet, det vill säga i första draget stryker Spelare 1 talet 21 och skriver istället 19 eller 20. Spelet fortsätter på samma sätt tills en av spelarna når "0". Som ni förstår är talet 21 bara valt på måfå; man kan lika gärna välja att börja från något annat icke-negativt heltal, som till exempel 12 eller 1727. Frågan är i allmänhet: vilka startpositioner är *säkra* för Spelare 2? Finns det ens sådana "säkra positioner", varifrån men på förhand vet att Spelare 1 bara har dåliga drag?
- 2) **Det "klassiska Nim-spelet":** Ofta kallas spelet bara för "Nim" för reglerna är så oerhört enkla. Man kan spela på valfritt antal högar, med givet antal tändstickor i varje hög. Reglerna är likadana oberoende av antalet högar: *de två spelarna turas om att ta ett valfritt antal tändstickor från exakt en hög, som minst en sticka och som mest en hel hög. Spelet slutar när sista stickan är dragen och den som inte kan dra har förlorat.* Den matematiska teorin runt detta spel, som är grundläggande för många andra liknande spel, upptäcktes först år 1902, av Bouton. (Om det finns intresse kan jag lite senare beskriva teorin i relativt stora drag, men det kommer inte ingå i examination av kursen.) *Det ni ska göra är att spela spelet, först på en hög med tändstickor, sedan med några enkla konfigurationer av två högar (se bildexempel nedan) och till sist på tre högar.* Om man förstår hur man kan vinna spelet på tre högar så är man faktiskt inte långt ifrån att förstå den grundläggande teorin för alla så kallade "icke-partiska" spel. (Detta var en stor upptäckt på 1930-talet, men teorin är faktiskt inte jätte-svår, även om den sträcker sig en bit utanför denna kurs.) Det finns även "partiska" kombinatoriska spel; det vanligaste är nog Schack, som spelas i många varianter världen runt. Vad betyder termen "icke-partisk" tror du? Försök beskriva denna grundläggande skillnad mellan Schack och Nim med några få ord! (Teorin för partiska spel upptäcktes faktiskt inte förrän på 1970-talet av Conway; den är mycket mer avancerad än för icke-partiska spel.) Bilden nedan beskriver positionen (3, 2) för Nim på två högar. Vem vinner detta spel? Spelare 1 kan alltså välja att flytta till någon av positionerna (2, 2), (1, 2), (0, 2), (3, 1) eller (3, 0). Är någon av dessa ett bättre val än de andra?



**Utförande:** I den här mer praktiska/experimentella delen av kursen ska ni alltså fundera på dessa spel, spela dem med varandra tills ni förstår lösningarna, eller om ni hellre vill det, lösa dem på annat sätt.

- Man letar efter möjliga mönster bland de ”säkra positionerna”. Den spelare som flyttar till en ”säker position” kan också garantera slutgiltig vinst! Är detta ett sant påstående? Varför?
- När man tror sig ha hittat ett mönster, så gäller det att försöka förstå det, det vill säga att hitta en vattentät förklaring (ett bevis) till varför det är korrekt. Det är här man har nytta av kunskaper i logik, mängdlära, funktioner, rekursion med mera. (De som kan och vill får även gärna använda datorprogrammering i valfritt programmeringsspråk för att upptäcka mönster, men det kommer inte att krävas i kursen.)
- När ni har löst något av de ovanstående spelen vill jag att ni själva funderar på enkla variationer, ser hur de fungerar spelmässigt och om det går att förklara vem som vinner och hur. Jag uppskattar alltid frågor och funderingar runt dessa frågor.
- När ni jobbat lite med allt detta vill jag att ni lämnar in en kort redogörelse av vad ni kommit fram till, gruppvis till mig. Gruppindelning väljer ni själva, men jag rekommenderar ungefär 4 deltagare i varje grupp. Ni behåller gärna gruppindelningen under hela kursens gång. (Eventuellt kan vi byta indelningar efter första duggan. Det bestämmer vi senare.) Duggorna (se hemsidan) kan med fördel även innehålla speluppgifter. Vi använder matematik för att förstå spel och spel för att förstå matematik.
- Det finns fler kombinatoriska spel och varianter som vi kan ta upp under kursens gång, men de två jag beskriver här är grundläggande för denna del av kursen. Ett förslag till variation för ”21”-spelet är att man även får ta bort tre stickor om man vill. Vem vinner då från 21? Hur? Jag har fler varianter, men väntar med att föreslå, tills jag ser vilka förslag ni har.

Jag kommer så klart att finnas tillgänglig för diskussioner på föreläsningar och lektionstid. Utanför schemalagd tid kan ni även kolla om jag är på kontoret i Jupiter, våning 4 (mitt namn vid dörren). Om jag är på kontoret svarar jag gärna på frågor! Jag kommer att ha ett par möten med kursrepresentanter efter de första veckorna.