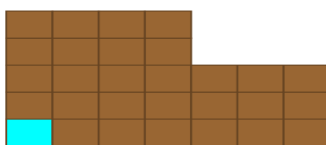


Några fler kombinatoriska spel för kursen mve070, VT2014

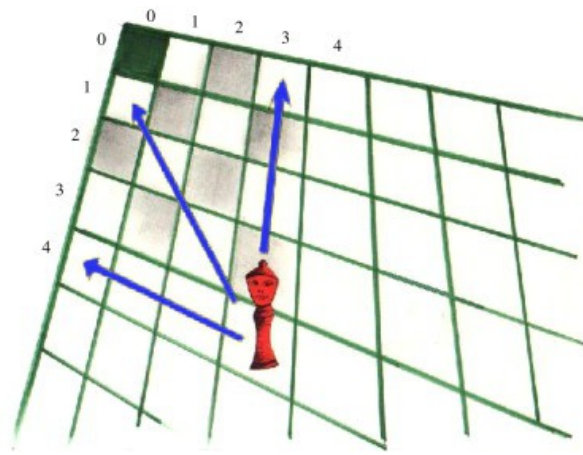
Här är några fler 2-personers (icke-partiska) kombinatoriska spel, med anknytning till kursen. Jag avslöjar inte namnen på alla spelen, eftersom tanken är att spela dem tills man börjar förstå vilka mönster de säkra positionerna satisfierar. När man tycker sig ha upptäckt något mönster, vill man gärna hitta ett bra argument för om det håller; ett bevis. Om inte det går, har man nog gissat fel mönster. Alla spelen är "icke-partiska" i den mening att spelarna följer exakt samma regler (de är väldigt "partiska" i den mening att endast en av spelarna har en bra vinnande strategi).

"Chomp": På två föreläsningar fick vi prova spelet "Chomp", där två spelare turas om att "äta" från en chokladkaka genom att peka på en bit och äta alla bitar upp-och-till-höger om biten. Nedersta biten till vänster är "giftig" (eller åtminstone oaptitlig), så den spelare som tvingas äta den förlorar. Vi visar, med hjälp av motbevis-metoden i Exempel 1.2.1 (nya upplagan), att Spelare 1 vinner från rektangulär kaka större än 1×1 (Spelare 2 vinner så klart från 1×1).



Bevis: Låt universum vara alla möjliga spelpositioner i Chomp. Låt $P(x)$ vara påståendet att x är rektangulärt och $Q(x)$ påståendet att Spelare 1 vinner x . Vi ska försöka hitta ett motbevis till $Q(x)$, givet $P(x)$. Då antar vi att det finns x sådant att $P(x)$ men inte $Q(x)$. Det vill säga, vi antar att det finns ett rektangulärt spelbräde y varifrån Spelare 1 inte kan vinna. Vi gör experimentet att Spelare 1 tar bort endast den översta biten till höger, från y , och kallar det nya brädet y' . Enligt vår hypotes är detta inte ett vinnande drag. Då måste Spelare 2 kunna hitta ett vinnande drag, från y' , säg till y'' . Men vilket drag som helst som Spelare 2 kan göra, skulle också Spelare 1 kunna gjort. Alltså, speciellt hade Spelare 1 ett vinnande drag till y'' redan i sitt första drag, vilket motsäger utsagan " $P(y)$ men inte $Q(y)$ ". Alltså går det inte att hitta ett motexempel till $P(x)$ medför $Q(x)$, så Spelare 1 kan med säkerhet vinna från alla rektangulära spelbräden. Hur detta går till i praktiken, förtäljer inte historien. Beviset är icke-konstruktivt och det finns (till min vetskap) ännu inte någon känd algoritm som snabbt kan räkna ut ett vinnande drag för Spelare 1.

Spel A. Vi spelar med två högar av tändstickor och reglerna är som i det klassiska Nim-spelet (se förra stencilen), fast spelaren som står i tur att dra, har även alternativet att istället ta bort lika många stickor från bägge högarna, som mest antalet i den mindre högen. Försök hitta ett mönster på de säkra positionerna och beskriv dem matematiskt (rekursivt och/eller algebraiskt). **Exempel:** De två högarna har 3 respektive 4 tändstickor, motsvarande position $(3, 4)$. Spelare 1 kan nu dra som i Nim (till valfri position i mängden $\{(0,4), (1,4), (2,4), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}$), men även, genom att ta lika många stickor från varje hög, direkt till någon av positionerna $(0,1)$, $(1,2)$ eller $(2,3)$. Notera att positionen $(2,3)$ kan nås på två olika sätt (det spelar ju ingen roll vilken ordning högarna ligger). Spelet kan med fördel spelas på ett schackbräde med endast en drottning som spelarna turas om att flytta. Lista ut de exakta reglerna (se bild) och använd det givna rutnätet för att rekursivt beskriva alla säkra start-positioner (för Spelare 2).



Spel B (generalisering av subtraktions-spelet "21" från första stencilen). Detta är egentligen en hel spelfamilj och det gäller att försöka ställa en lämplig generell hypotes. Hur generaliserar vi lämpligen "21"? I detta spel gällde det ju att spelarna fick ta bort antingen 1 eller 2 tändstickor från en given hög. Nu kan man ju hitta på ett nytt liknande subtraktions-spel, där spelarna istället får ta bort antingen 1, 2 eller 3 tändstickor. Likaså, för givet positivt heltal k , ytterligare spel kan definieras via regeln att spelaren som står i tur att dra, tar bort mellan 1 och k tändstickor. Vi kallar detta spel *k-subtraktions spelet*; kan man hitta ett mönster för alla säkra startpositioner? Ge ett bevis för din förmodan. Ytterligare generalisering av dessa subtraktions-spel är att ta en valfri ändlig mängd med positiva heltal S och godkänna subtraktion från det givna talet (tändstickshögen) om och endast om det sker med tal från S ; annars turas man om att spela som vanligt. Den som gör sista subtraktionen vinner. Tillexempel kan vi ta mängden $S = \{1, 4\}$ och spela från 13. Vem vinner? Spelare 1 får subtrahera antingen 1 eller 4 från 13. Detta ger möjliga positioner efter första draget: 9 eller 12. Vilken är bättre, om någon? Går det att hitta någon allmän formel? Undersök om det blir periodiska mönster i de säkra positionerna givet några enkla dragmängder S . Ställ upp en allmän hypotes och fundera på hur ett bevis för din hypotes skulle kunna se ut.

Spel C. Detta spel börjar med en hög med tändstickor (tillexempel 23). I första draget tar Spelare 1 bort ett positivt antal x stickor, men inte hela högen. I fortsättning får spelarna ta bort som minst en sticka och som mest dubbelt så många som föregående spelare tog bort, dvs i det här fallet som mest $2x$ stickor. Sista draget vinner. Vem vinner från 23? Tillexempel om Spelare 1 tar bort 3 tändstickor, och hamnar på 20, kan Spelare 2 i sitt första drag gå till något valfritt antal, mellan 14 och 19 stickor. Från vilka startpositioner går det att hitta en allmän formulering för hur man ska dra för att vinna? En lite enklare fråga: vilka startpositioner är säkra? (En något enklare version av det här spelet är att spelarna istället får ta bort som mest *samma antal* stickor som föregående spelare tog bort, dvs som mest x stickor. Vem vinner detta matematiska spel från, säg 23, och hur?)

Spel D. Detta spel börjar med ett par icke-negativa heltal, säg (9, 20). Spelarna turas om att subtrahera en *multipl* av *det lilla talet* från det stora talet, med restriktionen att *resten* måste vara icke-negativ. Den nya spelpositionen består av det ursprungligen minsta talet och resten. **Exempel:** (9, 20) $\rightarrow$ (9, 11) är ett möjligt drag. Även (9, 20) $\rightarrow$ (2, 9) är möjligt, men det finns inga fler drag från (9, 20). Finns det någon allmän regel för hur de säkra positionerna ser ut (från allmän startposition)? Vilket drag är bättre (om något) från de bägge nämnda?

Spel D. (Dubblerspelet). Detta tändsticks-spel är lite mer avancerat än de förra. Spelaren som står i tur måste annonsera sitt drag för nästa spelare, först utan att dra. Nästa spelare har möjlighet att acceptera förslaget eller att *dubblera* det, *innan* han/hon drar. Den som inte kan dubblera föregående spelares drag, för att antalet tändstickor skulle bli negativt, vinner! Första draget är valfritt. Man börjar med ett givet antal tändstickor, säg 13. Spelare 1

annonserar att hon vill ta bort ett positivt antal stickor x , men förslagsvis som mest hälften av det totala antalet, dvs som mest 6 stycken i det här fallet. Spelare 2 väljer att flytta från $y = 13 - x$ eller från $y = 13 - 2x$. Det vill säga antingen så accepterar man den förra spelarens drag eller så dubblar man det, innan man drar. Det är därför den förra spelaren alltid vill lämna som minst hälften av stickorna på bordet vid varje drag: *man måste alltid erbjuda möjligheten att dubblera motståndarens drag för att ha en chans att vinna*. Spelet fortsätter på samma sätt från y , men nu är det Spelare 2 som annonserar att han vill ta bort ett visst antal (säg z) stickor från y , och Spelare 1 som väljer om hon (innan sitt drag) vill dubblar Spelare 2's drag eller inte. Sista draget vinner.

Exempel: om $x = 6$ ovan, så får vi $y = 7$ eller $y = 1$. Det är omöjligt att flytta från $y = 1$ (varför?). Alltså väljer Spelare 2 att flytta från $y = 7$. Därifrån går det att ta bort som mest 3 stickor. Säg att Spelare 2 i detta läge väljer att annonsera att han vill ta bort $z = 2$ stickor. Då erbjuds Spelare 1 att flytta från $y' = 5$ eller $y' = 3$. Bägge alternativen ger upphov till dragmöjlighet. Vilket är bättre, om något? Vad uppfyller de säkra positionerna för regel i allmänhet? (De motsvarar en klassisk sekvens från 1930-talet inom ett forskningsområde som heter Kombinatorisk Talteori, ytterligare en underavdelning till Diskret Matematik. Ledtråd: för att hitta säkra positioner, skriv antalet stickor i högen enligt bas 3 expansion. I bas 3 använder man bara siffrorna 0, 1 eller 2 för att representera heltal. Tillexempel 8 i decimal form blir 22, vilket här betyder $2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$.)

En allmän fråga om kombinatoriska spel. Hur ändrar sig de säkra startpositionernas placeringar om man gör små ändringar i spelreglerna för ett givet spel? Tillexempel kan man lägga till en så kallad "blockerande manöver": den föregående spelaren får *blockera* som mest ett av nästa spelares drag. Annars följer spelet de gängse reglerna. Testa denna manöver på Nim och någon variant av "21". Fundera någon lämplig liten ändring du själv hittar på till något spel och hur det påverkar mönstren av vinnande positioner på det ursprungliga. Hur ändras perioden på subtraktions-spelet $S = \{1, 4\}$ ovan om man lägger till ytterligare ett tal i dragmängden (tillexempel lägg till möjligheten att ta bort 2 stickor och spela istället från $S' = \{1, 2, 4\}$)? När ändras de säkra positionerna över huvud taget?

Lycka till, Urban (kursledare mve070, 2014)