

Facit till Övningstentamen i Diskret Matematik, MVE070, lp3, 13/14

1. Bestäm sanningshalten i utsagan

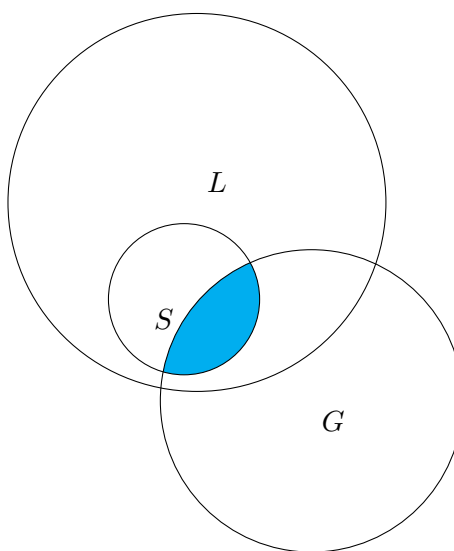
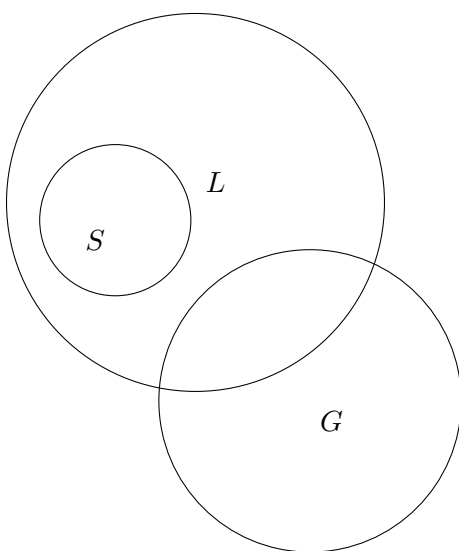
$$(\neg p \vee q) \rightarrow (q \wedge p).$$

Rätt svar ges via sanningsstabell.

Svar:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$q \wedge p$	$\neg p \vee q \rightarrow q \wedge p$
F	F	S	S	F	F
F	S	S	S	F	F
S	F	F	F	F	S
S	S	F	S	S	S

Somliga lärare är glada och alla studenter är lärare. Medför detta att somliga studenter är glada? Nej, se bild nedan till vänster! L=Lärare, S=Student, G=Glad. Medför det att inga lärare är glada studenter? Nej, se bild till höger!



Vi ska hitta motbevis till bägge utsagorna. Vi avstår här från att införa ytterligare beteckningar (vilket är en möjlig väg att gå, när argumentet inte är alltför komplicerat):

Somliga lärare är glada
Alla studenter är lärare
Somliga studenter är glada

Somliga lärare är glada
Alla studenter är lärare
Inga lärare är glada studenter

Vi börjar med den vänstra. Om det inte finns glada studenter, så låter vi x student medföra x inte glad lärare. Då är hypotes 2 sann. Vi låter en lärare som inte är student vara glad. Då är hypotes 1 sann. Vi har hittat ett motbevis. För den högra utsagan gör vi så här: om slutsatsen är falsk, så hittar vi en individ i det färgade i Eulerdiagrammet. Det finns en lärare som är en glad student. Vi kan låta alla andra studenter vara lärare, vilket gör hypotes 2 sann. Hypotes 1 är automatisk sann om slutsatsen är falsk.

2. Är det sant att tomma mängden är element i alla mängder?

Svar: Nej, till exempel så är ingen mängd element i sig själv.

Vad blir potensmängden av mängden $\{1, 2, 4\}$?

Svar: $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$.

Låt $A = \{a, b, c\}$ och $B = \{a, d, e, f\}$. Hur många element innehåller $(A \cup B) \setminus (B \cap A)$?

Svar: $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$ och $B \cap A = \{a\}$, så $|\{b, c, d, e, f\}| = 5$ är rätt svar.

Är $|A \setminus B| > |B \setminus A|$?

Svar: Nej eftersom $2 < 3$.

Den kartesiska produkten $A \times B$ innehåller ett visst antal element: Hur många?

Svar: $3 \cdot 4 = 12$.

Är relationen R på A en partiell ordning om xRy betyder "x står före y" i alfabetet? Motivera ditt svar.

Svar: Det beror på hur vi tolkar ordet "före". Om vi menar strikt före, så blir det ingen partiell ordning, eftersom a inte är relaterat till a, så reflexiviteten spricker; men om vi tillåter att a är före a, osv, så är det en partiell ordning. Det är i det senare fallet lätt att kolla reflexivitet, antisymmetri och transitivitet.

3. Är funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 - 1$ injektiv eller surjektiv (eller bägge), där $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$.

Svar: Eftersom vi har definierat funktionen på de naturliga talen, så kommer inte alla naturliga tal att träffas, till exempel $f(x) \neq 4$, för alla x . Därför är funktionen inte surjektiv. Injektiviteten håller eftersom de negativa talen inte ingår i definitionsmängden.

Hur blir det om istället $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, \infty)$, med samma definition av f ? Svar: Nu blir funktionen surjektiv, eftersom $x = \sqrt{y+1} \in \mathbb{R}$, för alla y i målmängden $[-1, \infty)$. Men den blir inte injektiv eftersom till exempel $1^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0 \in [-1, \infty)$.

4. Visa, med hjälp av induktion, i gällande fall, att för alla $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n A \cdot B^i = A \frac{B^{n+1} - 1}{B - 1}.$$

Svar: Vi utesluter först de värden på B , där uttrycket till höger inte kan gälla. Om $B = 0$, så är likheten uppenbarligen falsk om $A \neq 0$. Om $B = 1$, så är summan till vänster lika med $A(n+1)$ och högerledet är inte definierat. För alla andra A, B kan vi göra så här. Basfallet är när $n = 0$. Då blir VL = A = HL. Antag att uttrycket gäller för ett fixt $p = n \in \mathbb{N}$. Vi ska visa att det gäller även för $p+1$. Vi har från induktionshypotesen att

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{p+1} A \cdot B^i &= A \frac{B^{p+1} - 1}{B - 1} + AB^{p+1} \\ &= A \frac{B^{p+1} - 1 + B^{p+1}(B - 1)}{B - 1} \\ &= A \frac{B^{p+2} - 1}{B - 1}, \end{aligned}$$

vilket skulle visas.

Hur definierar man en geometrisk och en aritmetisk summa? Svar: Summan $\sum_{i=0}^n a_i$ är aritmetisk om, för alla i , $a_{i+1} - a_i = C$ är en reell konstant. Summan är geometrisk om för alla i , $a_{i+1}/a_i = C$ är en reell konstant.

Beräkna summan $5 + 7 + 9 + \dots + 47$ med hjälp av en lämplig formel. Hur många termer har den? Är den geometrisk eller aritmetisk? En lämplig formel i sammanhanget är den för aritmetisk summa, vilken ger $5(n+1) + 2\frac{n(n+1)}{2}$. Men vi behöver ta reda på n . Subtrahera 5 från 47 och dela med 2 ger att $n = 21$. Därför är vår summa $5 \cdot 22 + 2\frac{21 \cdot 22}{2}$, vilket efter förenkling blir $26 \cdot 22 = 520 + 52 = 572$.

5. Vi studerar en rekursivt definierad funktion: Låt $f(1) = 1$ och om $n \geq 1$,

$$f(n+1) = \sqrt{\frac{1}{1+f(n)}}.$$

Är det sant att $0 < f(n) \leq 1$, för alla $n \in \mathbb{Z}_+$? Basfallet stämmer ju såklart, men hur gör man resten av beviset med hjälp av induktion? Svar: Induktionshypotesen är att $0 < f(n) \leq 1$ för ett fixt positivt heltal n . Detta ger direkt att

$$0 < \sqrt{\frac{1}{1+1}} \leq f(n+1) = \sqrt{\frac{1}{1+f(n)}} < \sqrt{\frac{1}{1+0}} \leq 1.$$

6. Lisa utmanar Kalle på ett parti Nim. Hon föreslår att Kalle börjar flytta från positionen $(7, 4, 3)$, tre högar, med respektive 7, 4 och 3 tändstickor. Reglerna är ju som följer: man turas om att ta bort ett valfritt antal stickor från en valfri hög, som minst en sticka och som mest en hel hög. Den som inte kan dra förlorar. Vem vinner vid perfekt spel? Motivera ditt svar.

Svar: Nim-summan av de tre högarna blir 0: $7 \oplus 4 \oplus 3 = 111_2 \oplus 100_2 \oplus 011_2 = 0$. Därför kan inte Kalle vinna om han börjar och om Lisa spelar perfekt.

Kalle kontrar och föreslår att de från samma spelposition istället spelar spelet "21", men nu som en *summa* av tre "21-spel". Han tror att han har större chans att vinna detta, om han nu måste börja från positionen $(7, 4, 3)$. I spelet "21" får man ta en eller två stickor från exakt en hög, och ingenting annat; sista draget vinner. Bevisa eller motbevisa Kalles förmodan. Svar: Här är situationen lite annorlunda eftersom vi måste räkna i de ekvivalensklasser som uppstår i "21": $7 =_{21} 1$, $4 =_{21} 1$ och $3 =_{21} 0$. Vi får att Nim-summan av högarna blir 0 även i detta fallet och Kalle kan alltså inte vinna om han börjar.

Vad menar man med uttrycket en "summa av spel"? Svar: En summa av spel brukar betyda att man spelar i exakt en spel-komponent åt gången, givet de vanliga spelreglerna i varje spelkomponent. Att man kallar det "summa" beror på att man kan få ut värdefull information genom att räkna ut Nim-värdet av varje komponent och sedan utföra bitvis XOR-addition på bas-2 utvecklingen av de respektive Nim-värdena.

7. Euklides algoritm används för att ta reda på största gemensamma delare till två heltal. Definiera begreppet "största gemensamma delare".

Svar: Låt $a, b \in \mathbb{Z}$. Då är $\text{sgd}(a, b)$ det största heltal som delar både a och b .

Beräkna $\text{sgd}(252, 98)$ med hjälp av Euklides algoritm. Svar:

$$252 = 2 \cdot 98 + 56$$

$$98 = 1 \cdot 56 + 42$$

$$56 = 1 \cdot 42 + 14$$

$$42 = 3 \cdot 14,$$

så $\text{sgd}(252, 98) = 14$.

Primtalsfaktorisering är unik (bortsett från ordningen). Verifiera din "sgd"-beräkning, genom att primtalsfaktorisera talen 252 och 98.

Svar: $252 = 2 \cdot 126 = 2^2 \cdot 63 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ och $98 = 2 \cdot 49 = 2 \cdot 7^2$. Från denna beräkning ser man att $2 \cdot 7$ är talens största gemensamma delare.

8. Lisa vill handla frukt för exakt 45 kronor: bananerna kostar 7 kronor och äpplena 6 kronor stycket. Hur många köper hon av varje sort? Kalle säger att det inte går att veta med bestämdhet, och kanske går det inte ens jämt ut. Lisa säger att det går det visst det och det finns bara en möjlig lösning. Hur kan hon veta det?

Svar: $1 = \text{sgd}(6, 7) \mid 45$, så det finns oändligt många lösningar till heltalsekvationen $7x + 6y = 45$. Att det finns exakt 1 lösning beror på att $(x_0, y_0) = (3, 4)$ är en lösning och $(x, y) = (3 + 6n, 4 - 7n)$, $n \in \mathbb{Z}$ är alla lösningar. Om $n \neq 0$, blir antingen x eller y negativt.

9. Ställ upp additions- och gångertabellerna modulo 6 och hitta alla inverterbara element i $(+, \mathbb{Z}_6)$ och $(\cdot, \mathbb{Z}_6)$. Ge deras respektive inverser med hjälp av tabellerna.

Svar:

$(+, \mathbb{Z}_6)$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Alla element i $\mathbb{Z}_6$ har additiv invers: $-0 = 0$, $-1 = 5$, $-2 = 4$, $-3 = 3$, $-4 = 2$, $-5 = 1$.

$(\cdot, \mathbb{Z}_6)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Endast 1 och 5 har multiplikativ invers i $\mathbb{Z}_6$: $1^{-1} = 1$ och $5^{-1} = 5$.

Går det att lösa ekvationen $3x \equiv 4 \pmod{6}$? Svar: Nej, man läser av i tabellen att ingen multipel av 3 blir 4 modulo 6.

Hur är det med $5x \equiv 4 \pmod{6}$? Svar: Ja, här går det bättre. man läser av i tabellen att $5 \cdot 2 \equiv 4 \pmod{6}$, och man ser att $x \equiv 2 \pmod{6}$ är den enda lösningen.

Vad betyder egentligen beteckningen $[1]_6$? Svar: Man menar hela mängden $\{\dots, -5, 1, 7, \dots\}$, det vill säga hela ekvivalensklassen av tal som har rest 1 modulo 6.

Vad blir $[3]_6^5$? Svar: Vi använder oss av regeln $[3]_6^5 = [3^5]_6$ Eftersom $3^2 = 3$ i $\mathbb{Z}_6$, så blir även $3^5 = 3$.