

Övningstentamen i Diskret Matematik, MVE070, lp3, 13/14

Här hittar ni lite fler uppgifter än vad det blir på tentan. Detaljerna ska skilja sig, men karaktären av uppgifterna ska stämma överens med de som kommer på tisdag. Om du vill kolla upp ungefärligt hur du ligger till, betyder det att för Betyg 3: 30- poäng. Betyg 4: 50- poäng. Betyg 5: över 60 poäng. Deluppgifterna är värda mellan 2 och 6 poäng beroende på svårighetsgrad och antalet uppgifter per fråga. Varje fråga har flera (här onummerade) deluppgifter. Facit i en annan fil.

(På tentan kommer det att stå så här: Inga hjälpmedel. Telefon: Urban Larsson, 031-7725893 kolla upp. För godkänt krävs 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng. Betyg 4: 30-39 poäng. Betyg 5: över 40 poäng. Inga bonuspoäng. Lösningar och besked om rättning lämnas på hemsidan: www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve070/1314. Skriv program och inskrivningsår på omslaget. Skriv din personliga kod på samtliga inlämnade papper. Examinator: Thomas Wernstål.)

Lycka till! Urban

1. Bestäm sanningshalten i utsagan

$$(\neg p \vee q) \rightarrow (q \wedge p).$$

Rätt svar ges via sanningsstabell.

Somliga lärare är glada och alla studenter är lärare. Medför detta att somliga studenter är glada? Medför det att inga lärare är glada studenter? Två Euler-diagram ger fingervisning om rätta svaren. Ge även logiska bevis.

2. Är det sant att tomma mängden är element i alla mängder?

Vad blir potensmängden av mängden $\{1, 2, 4\}$?

Låt $A = \{a, b, c\}$ och $B = \{a, d, e, f\}$. Hur många element innehåller $(A \cup B) \setminus (B \cap A)$?

Är $|A \setminus B| > |B \setminus A|$?

Den kartesiska produkten $A \times B$ innehåller ett visst antal element: Hur många?

Är relationen R på A en partiell ordning om xRy betyder " x står före y " i alfabetet? Motivera ditt svar.

3. Är funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 - 1$ injektiv eller surjektiv (eller bägge), där $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$.

Hur blir det om istället $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, \infty)$, med samma definition av f ?

4. Visa, med hjälp av induktion, i gällande fall, att för alla $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n A \cdot B^i = A \frac{B^{n+1} - 1}{B - 1}.$$

Hur definierar man en geometrisk och en aritmetisk summa?

Beräkna summan $5 + 7 + 9 + \dots + 47$ med hjälp av en lämplig formel. Hur många termer har den? Är den geometrisk eller aritmetisk?

5. Vi studerar en *rekursivt definierad funktion*: Låt $f(1) = 1$ och om $n \geq 1$,

$$f(n+1) = \sqrt{\frac{1}{1+f(n)}}.$$

Är det sant att $0 < f(n) \leq 1$, för alla $n \in \mathbb{Z}_+$? Basfallet stämmer ju såklart, men hur gör man resten av beviset med hjälp av induktion?

6. Lisa utmanar Kalle på ett parti Nim. Hon föreslår att Kalle börjar flytta från positionen $(7, 4, 3)$, tre högar, med respektive 7, 4 och 3 tändstickor. Reglerna är ju som följer: man turas om att ta bort ett valfritt antal stickor från en valfri hög, som minst en sticka och som mest en hel hög. Den som inte kan dra förlorar. Vem vinner vid perfekt spel? Motivera ditt svar.

Kalle kontrar och föreslår att från samma spelposition istället spelar spelet “21”, men nu som en *summa* av tre “21-spel”. Han tror att han har större chans att vinna detta, om han nu måste börja från positionen $(7, 4, 3)$. I spelet “21” får man ta en eller två stickor från exakt en hög, och ingenting annat; sista draget vinner. Bevisa eller motbevisa Kalles förmodan.

Vad menar man i detta sammanhang med uttrycket en “summa av spel”?

7. Euklides algoritm används för att ta reda på största gemensamma delare till två heltal. Definiera begreppet “största gemensamma delare”.

Beräkna $\text{sgd}(252, 98)$ med hjälp av Euklides algoritm.

Primtalsfaktorisering är unik (bortsett från ordningen). Verifiera din “sgd”-beräkning, genom att primtalsfaktorisera talen 252 och 98.

8. Lisa vill handla frukt för exakt 45 kronor: bananerna kostar 7 kronor och äpplena 6 kronor stycket. Hur många köper hon av varje sort? Kalle säger att det inte går att veta med bestämdhet, och kanske går det inte ens jämt ut. Lisa säger att det går det visst det och det finns bara en möjlig lösning. Hur kan hon veta det?

9. Ställ upp additions- och gångertabellerna modulo 6 och hitta alla inverterbara element i $(+, \mathbb{Z}_6)$ och $(\cdot, \mathbb{Z}_6)$. Ge deras respektive inverser med hjälp av tabellerna.

Går det att lösa ekvationen $3x \equiv 4 \pmod{6}$?

Hur är det med $5x \equiv 4 \pmod{6}$?

Vad betyder beteckningen $[1]_6$?

Vad blir $[3]_6^5$?