

# Facit till tentamen i Diskret Matematik, MVE070, 13/14

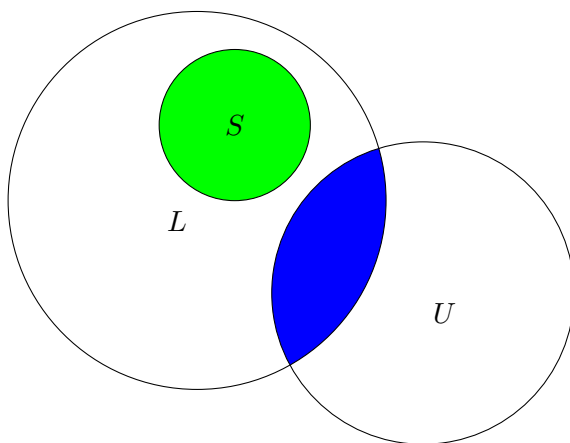
2014-08-18 kl. 8.30-12.30

1a) Beskriv utsagan  $\neg(p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$  med hjälp av en sanningstabell. Är den en tautologi? (2p)

Svar: Nej.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\neg(p \vee q)$ | $q \wedge p$ | $\neg(p \vee q) \rightarrow q \wedge p$ |
|-----|-----|------------|------------------|--------------|-----------------------------------------|
| F   | F   | F          | S                | F            | F                                       |
| F   | S   | S          | F                | F            | S                                       |
| S   | F   | S          | F                | F            | S                                       |
| S   | S   | S          | F                | S            | S                                       |

b) Betrakta följande hypoteser. Somliga lärare är unga och alla studenter är lärare. Medför detta att somliga studenter är unga? (4p)  
Börja med att rita Eulerdiagram och bevisa sedan med hjälp av predikatlogik.



Vi har följande utsaga:

Somliga lärare är unga  
Alla studenter är lärare  
-----  
Somliga studenter är unga

Vi letar motbevis, och antar därför att alla studenter är gamla. Vi låter en lärare vara ung (blått i figuren), vilket gör den första hypotesen sann. Vi låter alla (dessa gamla) studenter vara lärare (grönt i figuren), vilket gör andra hypotesen sann. Motbeviset är klart. Man kan alltså inte dra slutsatsen att somliga studenter är unga, ur de givna hypoteserna.

2) Låt  $A = \{a, d, f, g, h\}$  och  $B = \{a, c, e, f, h\}$ . På a) och b) krävs bara svar.

a) Är tomma mängden element i någon mängd? Svar: Ja. (1p)

b) Är tomma mängden delmängd i någon mängd? Svar: Ja. (1p)

c) Hur många element innehåller  $(A \cup B) \setminus (B \cap A)$ ? (2p)

Svar: 4, eftersom den sökta mängden är  $\{c, d, e, g\}$ .

d) Hur många element innehåller den kartesiska produkten  $A \times B$ ? (2p)

Svar:  $5 \cdot 5 = 25$ , det vill säga antalet element i mängden av alla ordnade par  $(x, y)$ ,  $x \in A$  och  $y \in B$ .

e) Hur många delmängder har den kartesiska produkten  $A \times B$ ? (2p)

Svar:  $2^{|A \times B|} = 2^{25}$ . Antalet är detsamma som antalet binära (0-1) strängar med exakt 25 symboler. Tänk, element nummer  $i$  är med om och endast om  $i$ te symbolen är en 1a.

---

3) Låt  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(x) = x^2 - x + 2$ .

a) Är  $f$  injektiv eller surjektiv eller bådadera? (3p)

Svar: Eftersom vi har definierat funktionen på de naturliga talen, så kommer inte alla naturliga tal att träffas; till exempel är  $f(x)$  jämn, för alla  $x$ . Därför är funktionen inte surjektiv. Injektiviteten håller, eftersom de negativa talen inte ingår i definitionsmängden, så funktionen är strikt växande.

b) Samma frågor som i a), men om istället  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ , och i övrigt med samma definition av  $f$ ? (3p)

Svar: Nu blir funktionen varken surjektiv eller injektiv. Talet 0 träffas aldrig (eftersom  $\min\{f(x)\} = 7/4$ ), vilket ger icke-surjektiv. Till exempel  $f(-1) = f(0) = 2$ , vilket ger icke-injektiv.

---

4) a) Hur definierar man en aritmetisk summa? Skriv en lämplig formel för att beräkna den. (3p)

Svar: Summan  $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$  är aritmetisk om, för alla  $i$ ,  $a_{i+1} - a_i = C$  är en reell konstant. Låt  $a_i = A + Bi$ . Då blir  $S_n = A(n+1) + B \frac{n(n+1)}{2}$ .

b) Beräkna summan (3p)

$$2 + 7 + 12 + \dots + 57$$

med hjälp av formeln i a). Hur många termer har den? Svar: Summan är aritmetisk, vilken ger  $2(n+1) + 5 \frac{n(n+1)}{2}$ . Men vi behöver ta reda på  $n$ . Subtrahera 2 från 57 och dela med 5 ger att  $n = 11$ , så den har 12 termer. (Vi börjar ju med 0te termen.) Därför är vår summa  $2 \cdot 12 + 5 \frac{11 \cdot 12}{2}$ , vilket blir  $24 + 55 \cdot 6 = 354$ .

---

5) Låt  $A, B \in \mathbb{R}$ . Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=0}^n A + Bk = A(n+1) + B \frac{n(n+1)}{2},$$

för alla  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Svar: Basfall:  $\sum_{k=0}^0 (A + Bk) = A = A(0+1) + B \cdot 0$ . Antag, som induktionshypotes, att

$$\sum_{k=0}^n A + Bk = A(n+1) + B \frac{n(n+1)}{2},$$

för givet  $n \geq 0$ . Induktionshypotesen ger

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} A + Bk &= \left( A(n+1) + B \frac{n(n+1)}{2} \right) + (A + B(n+1)) \\ &= A(n+2) + B \left( \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \right) \\ &= A(n+2) + B \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

vilket skulle visas.

---

**6) a)** I ett parti Nim föreslår Lisa att Kalle börjar flytta från positionen  $(9, 9, 4)$ , tre högar med vardera 9, 9 och 4 tändstickor. Reglerna är: man turas om att ta bort ett valfritt antal stickor från en valfri hög, som minst en och som mest en hel hög. Den som inte kan dra förlorar. Kan Lisa vara säker på att vinna? (3p)

Svar: Nej. Nim-summan av de tre högarna blir 4:  $9 \oplus 9 \oplus 4 = 1001_2 \oplus 1001_2 \oplus 100_2 = 4$ . Därför kan inte Lisa vinna om Kalle börjar och spelar perfekt. (Kalle ska börja med att ta bort 4 tändstickor från den minsta högen).

**b)** Kalle föreslår att från samma spelposition istället spela spelet "21", men nu som en *summa* av tre "21-spel". Han påstår att han har ett vinnande drag om han får börja från positionen  $(9, 9, 4)$ . I spelet "21" turas man om att ta en eller två stickor från exakt en hög i taget; sista draget vinner. Förklara Kalles påstående utan att göra några beräkningar. (3p)

Svar: Nim-värdet av de två högsta högarna är samma, så de påverkar inte resonemanget. Den minsta högen har Nim-värdet 1 i spelet "21". Därför vinner Kalle genom att ta bort en sticka från den minsta högen.

**7) a)** Lisa handlar frukt för 46 kronor, bananerna kostar 8 kronor och mandarinerna 6 kronor styck. (3p)  
Hur många köper hon av varje sort? Hur många lösningar finns det (är svaret entydigt)?

Svar:  $2 = \text{sgd}(6, 8) \mid 46$ , så det finns oändligt många lösningar till heltalsekvationen  $8x + 6y = 46$ . Vi delar bägge sidor med 2 och löser istället  $4x + 3y = 23$ . Det finns två lösningar, eftersom  $(x_0, y_0) = (5, 1)$  är en lösning och  $(x, y) = (5 + 3n, 1 - 4n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  är alla lösningar. Om  $n > 0$ , blir  $y$  negativt och om  $n < -1$ , blir  $x$  negativt, så  $(x, y) = (5, 1), (2, 5)$  är de två möjliga lösningarna.

**b)** Beräkna  $\text{sgd}(548, 56)$  med hjälp av Euklides algoritm. (3p)  
Svar:

$$\begin{aligned} 548 &= 9 \cdot 56 + 44 \\ 56 &= 1 \cdot 44 + 12 \\ 44 &= 3 \cdot 12 + 8 \\ 12 &= 1 \cdot 8 + 4, \\ 8 &= 2 \cdot 4. \end{aligned}$$

så  $\text{sgd}(548, 56) = 4$ .

**8)** Ställ upp additions- och gångertabellen modulo 9.

**a)** Hitta (med hjälp av tabellerna) alla inverterbara element i  $(+, \mathbb{Z}_9)$  och i  $(\cdot, \mathbb{Z}_9)$ . (3p)

Svar:

| $(+, \mathbb{Z}_9)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1                   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 |
| 2                   | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 | 1 |
| 3                   | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 | 1 | 2 |
| 4                   | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5                   | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6                   | 6 | 7 | 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7                   | 7 | 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 8                   | 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Alla element i  $\mathbb{Z}_9$  har additiv invers:  $-0 = 0, -1 = 8, -2 = 7, -3 = 6, -4 = 5, -5 = 4, -6 = 3, -7 = 2, -8 = 1$ .

| $(\cdot, \mathbb{Z}_9)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                       | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2                       | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 | 3 | 5 | 7 |
| 3                       | 0 | 3 | 6 | 0 | 3 | 6 | 0 | 3 | 6 |
| 4                       | 0 | 4 | 8 | 3 | 7 | 2 | 6 | 1 | 5 |
| 5                       | 0 | 5 | 1 | 6 | 2 | 7 | 3 | 8 | 4 |
| 6                       | 0 | 6 | 3 | 0 | 6 | 3 | 0 | 6 | 3 |
| 7                       | 0 | 7 | 5 | 3 | 1 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| 8                       | 0 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Inte alla element i  $\mathbb{Z}_9$  har multiplikativ invers:  $1^{-1} = 1, 2^{-1} = 5, 4^{-1} = 7, 5^{-1} = 2, 7^{-1} = 4, 8^{-1} = 8$ .

**b)** Använd lämplig tabell och besvara om det går att lösa ekvationen  $6x \equiv 5 \pmod{9}$ ? (1p)

Svar: Nej, man läser av i tabellen att ingen multipel av 6 blir 5 modulo 9.

**c)** Ge fullständig lösning till  $6x \equiv 3 \pmod{9}$ . (1p)

Svar: Man läser av i tabellen att restklasserna  $x \equiv 2, x \equiv 5$  och  $x \equiv 8$  modulo 9 löser ekvationen.

**d)** Vad betyder beteckningen  $[2]_9$ ? (1p)

Svar: Man menar hela mängden  $\{\dots, -7, 2, 11, \dots\}$ , det vill säga ekvivalensklassen av alla tal som kan skrivas på formen  $2 + 9n$ , för något  $n \in \mathbb{Z}$ .

**e)** Förenkla  $[2]_9^{19}$  så långt som möjligt. (2p)

Svar:  $2^3 \equiv -1 \pmod{9}$  ger förenkling av uttrycket till  $[2^{1+3 \cdot 6}]_9 = [2 \cdot (-1)^6]_9 = [2]_9$ .