

Facit till Tentamen i Diskret Matematik, MVE070, 13/14

2014-03-11 kl. 8.30-12.30

Inga hjälpmedel. Telefon: Urban Larsson, 031-7725894. För godkänt krävs 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng. Betyg 4: 30-39 poäng. Betyg 5: över 40 poäng. Inga bonuspoäng. Lösningar och besked om rättning lämnas på hemsidan: www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve070/1314. Skriv program och inskrivningsår på omslaget. Skriv din personliga kod på samtliga inlämnade papper. För full poäng, motivera dina svar väl. Examinator: Thomas Wernstål.

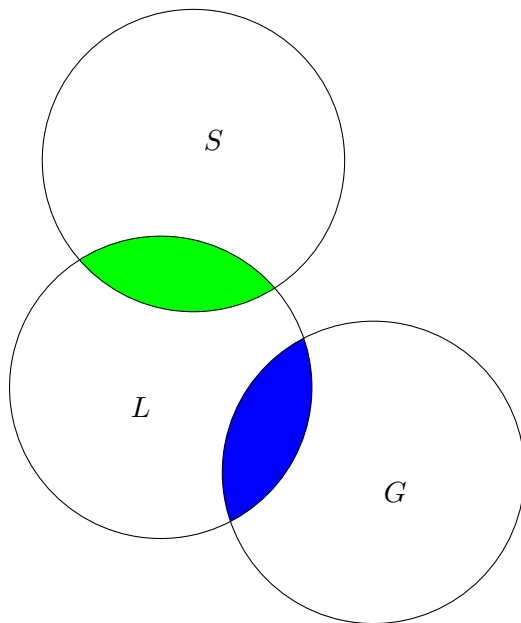
Lycka till! Urban

1a) Visa att utsagan $(\neg p \wedge q) \rightarrow (q \vee p)$ är en tautologi. (2p)

Svar:

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$q \vee p$	$\neg p \wedge q \rightarrow q \vee p$
F	F	S	F	F	S
F	S	S	S	S	S
S	F	F	F	S	S
S	S	F	F	S	S

b) Betrakta följande hypoteser. Somliga lärare är gamla och somliga studenter är lärare. (4p)
Medför detta att somliga studenter är gamla?
Börja med att rita Eulerdiagram och bevisa sedan med hjälp av predikatlogik.



Vi har följande utsaga:

Somliga lärare är gamla
Somliga studenter är lärare
Somliga studenter är gamla

Vi letar motbevis, och antar därför att alla studenter är unga. Vi låter en lärare vara gammal (blått i figuren), vilket gör den första hypotesen sann. Vi låter en ung student vara en ung lärare (grönt i figuren), vilket gör andra hypotesen sann. Motbeviset är klart. Man kan alltså inte dra slutsatsen att somliga studenter är gamla, ur de givna hypoteserna.

2) Låt $A = \{a, b, c, d\}$ och $B = \{a, c, d, e, f\}$. På a) och b) krävs bara svar.

a) Är tomma mängden element i alla mängder? Svar: Nej. (1p)

b) Är tomma mängden delmängd i alla mängder? Svar: Ja. (1p)

c) Hur många element innehåller $(A \cup B) \setminus (B \cap A)$? (2p)

Svar: 3, eftersom den sökta mängden är $\{b, e, f\}$.

d) Hur många element innehåller den kartesiska produkten $A \times B$? (2p)

Svar: $4 \cdot 5 = 20$, det vill säga antalet element i mängden av alla ordnade par (x, y) , $x \in A$ och $y \in B$.

e) Antag att vi känner till $a = |X \cup Y|$ och $b = |X \cap Y|$, för de två mängderna X och Y . Vad är det sammanlagda antalet element i mängderna, det vill säga, vad blir $|X| + |Y|$? Motivera ditt svar. (4p)

Svar: $|X| + |Y| = a + b$. Unionen $X \cup Y$ innehåller för få element och vi måste lägga till antalet element i snittet. Med andra ord, unionen innehåller ju $|X \setminus Y| + |Y|$ element och vi adderar $|X| - |X \setminus Y| = |X \cap Y|$.

3) Låt $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 + 1$.

a) Är f injektiv eller surjektiv eller bådaddera? (3p)

Svar: Eftersom vi har definierat funktionen på de naturliga talen, så kommer inte alla naturliga tal att träffas, till exempel $f(x) \neq 4$, för alla x . Därför är funktionen inte surjektiv. Injektiviteten håller eftersom de negativa talen inte ingår i definitionsmängden.

b) Samma frågor som i a), men om istället $f : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$, och i övrigt med samma definition av f ? (3p)

Svar: Nu blir funktionen surjektiv, eftersom $x = \sqrt{y-1} \in \mathbb{R}$, för alla y i målmängden $[1, \infty)$. Men den blir inte injektiv eftersom till exempel $1^2 + 1 = (-1)^2 + 1 = 2 \in [1, \infty)$.

4) a) Hur definierar man en geometrisk och en aritmetisk summa? (3p)

Svar: Summan $\sum_{i=0}^n a_i$ är aritmetisk om, för alla i , $a_{i+1} - a_i = C$ är en reell konstant. Summan är geometrisk om för alla i , $a_{i+1}/a_i = C$ är en reell konstant.

b) Beräkna summan (3p)

$$3 + 7 + 11 + \dots + 59$$

med hjälp av en lämplig formel. Hur många termer har den? Är den geometrisk eller aritmetisk? Summan är aritmetisk, vilken ger $3(n+1) + 4\frac{n(n+1)}{2}$. Men vi behöver ta reda på n . Subtrahera 3 från 59 och dela med 4 ger att $n = 14$, så den har 15 termer. Därför är vår summa $3 \cdot 15 + 4\frac{14 \cdot 15}{2}$, vilket efter förenkling blir $31 \cdot 15 = 310 + 150 + 5 = 465$.

5) a) Visa med hjälp av induktion att $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. (3p)

Svar: Basfall: $1 = \sum_{k=1}^1 k = \frac{1(1+1)}{2}$. Antag, som induktionshypotes, att $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, för givet $n \geq 1$.

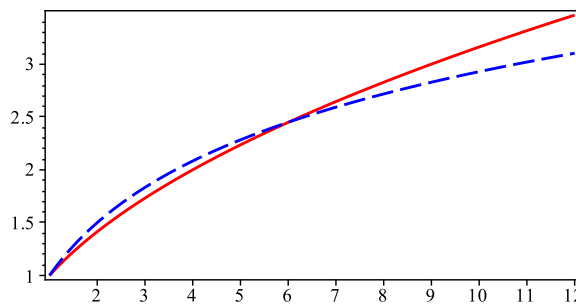
Vi får $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, vilket skulle visas.

b) De harmoniska talen definieras via summan $H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, för $n \in \mathbb{Z}_+$. Visa med hjälp av induktion att $H(n) < \sqrt{n}$, för alla heltal $n \geq 7$. (Ledtrådar: Basfallet är $0 < \sqrt{7} - H(7) \approx 0.0529$; se även Figur 1. Du vill kanske använda dig av $\sqrt{n} \geq \sqrt{7} > 5/2$ i induktionsteget.) (6p)

Svar: Basfallet är givet i uppgiften. Vi antar som induktionshypotes att $H(n) < \sqrt{n}$ för ett fixt $n \geq 7$. Vi måste visa att $H(n) + \frac{1}{n+1} = H(n+1) < \sqrt{n+1}$. Givet induktionshypotesen räcker det därför att visa att $\sqrt{n} + \frac{1}{n+1} < \sqrt{n+1}$. Vi kvadrerar bägge sidorna och får det ekvivalenta uttrycket: $n + 2\frac{\sqrt{n}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} < n+1$, så det räcker att visa att $2\frac{\sqrt{n}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} < 1$. Eftersom $1/\sqrt{n} \leq 1/\sqrt{7} < 2/5$ följer,

$$2\frac{\sqrt{n}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{4}{5} + \frac{1}{8^2} = \frac{64 \cdot 4 + 5}{64 \cdot 5} < 1,$$

vilket skulle visas.



Figur 1: Funktionen $H(n)$ representeras av den streckade linjen och $\sqrt{n}$ är den heldragna.

6) a) I ett parti Nim föreslår Lisa att Kalle börjar flytta från positionen $(6, 5, 3)$, tre högar med vardera 6, 5 och 3 tändstickor. Reglerna är: man turas om att ta bort ett valfritt antal stickor från en valfri hög, som minst en och som mest en hel hög. Den som inte kan dra förlorar. Kan Lisa vara säker på att vinna? (3p)

Svar: Nim-summan av de tre högarna blir 0: $6 \oplus 5 \oplus 3 = 110_2 \oplus 101_2 \oplus 011_2 = 0$. Därför kan inte Kalle vinna om han börjar och om Lisa spelar perfekt.

b) Kalle kontrar och föreslår att från samma spelposition istället spela spelet "21", men nu som en summa av tre "21-spel". Han påstår att han har ett vinnande drag om han får börja från positionen $(6, 5, 3)$. I spelet "21" får man ta en eller två stickor från exakt en hög, och ingenting annat; sista draget vinner. Bevisa eller motbevisa Kalles påstående. (3p)

Svar: Här är situationen lite annorlunda eftersom vi måste räkna i de ekvivalensklasser som uppstår i "21": $6 =_{21} 0$, $5 =_{21} 2$ och $3 =_{21} 0$. Vi får att Nim-summan av högarna blir 2 och Kalle kan alltså vinna om han tar bort två stickor från mellersta högen.

c) Vad menar man (i det här sammanhanget) med uttrycket en summa av spel? (3p)

Svar: En summa av spel brukar betyda att man spelar i exakt en spel-komponent åt gången, givet de vanliga spelreglerna i varje spelkomponent. Att man kallar det "summa" beror på att man kan få ut värdefull information genom att räkna ut Nim-värdet av varje komponent och sedan utföra bitvis XOR-addition på bas-2 utvecklingen av de respektive Nim-värdena.

7) Denna uppgift handlar om delbarhet. Definiera begreppet! (3p)

a) Lisa handlar frukt för 26 kronor, bananerna kostar 6 kronor och äpplena 4 kronor styck. (3p)

Hur många köper hon av varje sort? Visa hur många lösningar det finns.

Svar: $2 = \text{sgd}(4, 6) \mid 26$, så det finns oändligt många lösningar till heltalsekvationen $6x + 4y = 26$. Vi delar bägge sidor med 2 och löser istället $3x + 2y = 13$. Det finns exakt 2 lösningar eftersom $(x_0, y_0) = (3, 2)$ är en lösning och $(x, y) = (3 + 2n, 2 - 3n)$, $n \in \mathbb{Z}$ är alla lösningar. Om $n > 0$, blir y negativt och om $n < -1$, blir x negativt, så $(x, y) = (3, 2), (1, 5)$ är de två möjliga lösningarna.

b) Beräkna $\text{sgd}(248, 76)$ med hjälp av Euklides algoritm.

(3p)

Svar:

$$248 = 3 \cdot 76 + 20$$

$$76 = 3 \cdot 20 + 16$$

$$20 = 1 \cdot 16 + 4$$

$$16 = 4 \cdot 4,$$

så $\text{sgd}(252, 98) = 4$.

8) Ställ upp additions- och gångertabellen modulo 8.

a) Hitta, med hjälp av tabellerna, alla inverterbara element i $(+, \mathbb{Z}_8)$ och i $(\cdot, \mathbb{Z}_8)$.

(3p)

Svar:

$(+, \mathbb{Z}_8)$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

Alla element i $\mathbb{Z}_8$ har additiv invers: $-0 = 0, -1 = 7, -2 = 6, -3 = 5, -4 = 4, -5 = 3, -6 = 2, -7 = 1$.

$(\cdot, \mathbb{Z}_8)$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

Inte alla element i $\mathbb{Z}_8$ har multiplikativ invers: $1^{-1} = 1, 3^{-1} = 3, 5^{-1} = 5, 7^{-1} = 7$.

b) Använd lämplig tabell och besvara om det går att lösa ekvationen $6x \equiv 5 \pmod{8}$?

(3p)

Svar: Nej, man läser av i tabellen att ingen multipel av 6 blir 5 modulo 8.

Ge fullständig lösning till $6x \equiv 4 \pmod{8}$?

Svar: Man läser av i tabellen att bägge restklasserna $x \equiv 2$ och $x \equiv 6$ modulo 8 löser ekvationen.

c) Vad betyder beteckningen $[3]_7$?

Svar: Man menar hela mängden $\{\dots, -4, 3, 10, \dots\}$, det vill säga ekvivalensklassen av alla tal som har rest 3 vid division med 7.

Förenkla $[3]_7^{19}$ så långt som möjligt.

(3p)

Svar: $3^2 \equiv 2 \pmod{7}$ och $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ ger förenkling av uttrycket till $[3]_7[3^2]_7^9 = [3]_7[2]_7^9 = [3]_7[2^3]_7^3 = [3]_7$.