Tentamen i Diskret Matematik, MVE070, 13/14

2014-08-18 kl. 8.30-12.30

Inga hjälpmedel. Telefon: Timo Hirscher, 0734-407926. För godkänt krävs 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng. Betyg 4: 30-39 poäng. Betyg 5: över 40 poäng. Inga bonuspoäng. Lösningar och besked om rättning lämnas på hemsidan: www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve070/1314. Skriv program och inskrivningsår på omslaget. Skriv din personliga kod på samtliga inlämnade papper. För full poäng, motivera dina svar väl. Examinator: Thomas Wernstål. Lycka till! Urban

---

1a) Beskriv utsagan $\neg(p \vee q) \to (q \wedge p)$ med hjälp av en sanningstabell. Är den en tautologi? (2p)

b) Betrakta följande hypoteser. Somliga lärare är unga och alla studenter är lärare. Medför detta att somliga studenter är unga? Rita Eulerdiagram och bevisa med hjälp av predikatlogik. (4p)

---

2) Låt $A = \{\text{a, d, f, g, h}\}$ och $B = \{\text{a, c, e, f, h}\}$. På a) och b) krävs bara svar.

a) Är tomma mängden element i någon mängd? (1p)

b) Är tomma mängden delmängd i någon mängd? (1p)

c) Hur många element innehåller $(A \cup B) \setminus (B \cap A)$? (2p)

d) Hur många element innehåller den kartesiska produkten $A \times B$? (2p)

e) Hur många delmängder har den kartesiska produkten $A \times B$? (2p)

---

3) Låt $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 - x + 2$, där $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

a) Är f injektiv eller surjektiv eller bådadera? (3p)

b) Samma frågor som i a), men låt istället $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. (I övrigt med samma definition av f.) (3p)

4a) Hur definierar man en aritmetisk summa? Ge även en allmän formel för att beräkna den. (3p)

b) Beräkna summan (3p)

$$2 + 7 + 12 + \ldots + 57$$

med hjälp av formeln i a). Hur många termer har den?

---

5) Låt $A, B \in \mathbb{R}$. Visa med hjälp av induktion att (6p)

$$\sum_{k=0}^{n} A + Bk = A(n+1) + B\frac{n(n+1)}{2},$$

för alla icke-negativa heltal n.

6a) I ett parti Nim föreslår Lisa att Kalle börjar flytta från positionen $(9,9,4)$, tre högar med vardera 9, 9 och 4 tändstickor. Reglerna är: man turas om att ta bort ett valfritt antal stickor från en valfri hög, som minst en och som mest en hel hög. Den som inte kan dra förlorar. Kan Lisa vara säker på att vinna? (3p)

b) Kalle föreslår att från samma spelposition istället spela spelet "21", men nu som en *summa* av tre "21-spel". Han påstår att han har ett vinnande drag om han får börja från positionen $(9,9,4)$. I spelet "21" turas man om att ta en eller två stickor från exakt en hög i taget; sista draget vinner. Förklara Kalles påstående *utan* att göra några (avancerade) beräkningar. (3p)

7a) Lisa handlar frukt för 46 kronor, bananerna kostar 8 kronor och mandarinerna 6 kronor styck. Hur många köper hon av varje sort? Hur många lösningar finns det (är svaret entydigt)? (3p)

b) Beräkna sgd$(548, 56)$ med hjälp av Euklides algoritm. (3p)

8a) Ställ upp additions- och gångertabellen modulo 9. Hitta (med hjälp av tabellerna) alla inverterbara element i $(+, \mathbb{Z}_9)$ och i $(\cdot, \mathbb{Z}_9)$. (3p)

b) Använd lämplig tabell och besvara om det går att lösa ekvationen $6x \equiv 5 \pmod 9$? (1p)

c) Ge fullständig lösning till $6x \equiv 3 \mod 9$. (1p)

d) Vad betyder beteckningen $[2]_9$? (1p)

e) Förenkla $[2]_9^{19}$ så långt som möjligt. (2p)
