Tentamen i Diskret Matematik MVE070, 2015-03-17

Examinator: Johan Wästlund, tel 073-500 25 83.

Tillåtna hjälpmedel: Handskriven "formelsamling" på ett A4-ark (2 sidor).

Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng (inklusive bonuspoäng).

1. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna. Motivera dina svar!

   (a) $\{1,2,3\} \in \mathbb{N}$.

   (b) Den satslogiska utsagan $(p \to q) \vee p$ är en tautologi.

   (c) Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ som definieras av $f(n) = n^2$ är injektiv.

   (d) Funktionen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som definieras av $g(n) = n^2$ är injektiv.

   (e)
   $$\prod_{n=1}^{3} (n+2) = 60.$$

2. Bestäm antalet element i följande mängder:

   (a) $\{1,3,2,3,4\}$.

   (b) $\{1,2,3,4\} \cup \{3,4,5,6,7\}$.

   (c) $\{1,2,3,4\} \cap \{3,4,5,6,7\}$.

   (d) $\{1,2,3\} \times \{3,4,5\}$.

   (e) Potensmängden till $\{1,2,3,4,5,6\}$.

3. Vi definierar en relation R på de reella talen genom att låta xRy betyda att $\cos x \leq \cos y$. Undersök om R är en

   (a) Ekvivalensrelation, (b) Partiell ordning.

4. Bevisa genom induktion att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}.$$

Kom ihåg att:

- Ange vad som är induktionshypotesen
- Ange var i induktionssteget den används
- Kontrollera basfallet!

5. Para ihop beräkningsproblemen (a)–(c) med lämplig algoritm (1)–(3). En av algoritmerna har vi inte pratat om, så här får man använda uteslutningsmetoden. Lös sedan ett valfritt av problemen (a)–(c)!

   (a) Bestämma största gemensamma delaren till talen 2714 och 3841.

   (b) Beräkna 27^{143} modulo 841.

   (c) Hitta alla primfaktorerna i talet $2714^{38} + 41$.

   (1) Upprepad kvadrering, (2) Kvadratiska sållet, (3) Euklides algoritm.

6. Bevisa att ekvationen

$$3x^2 - 7y^2 = 1$$

saknar heltalslösningar, genom att välja lämpligt tal n och visa att kongruensen

$$3x^2 - 7y^2 \equiv 1 \pmod{n}$$

saknar lösningar.

7. Måltipset är ett spel där det gäller att gissa vilka 8 av totalt 30 fotbollsmatcher som blir målrikast. Om man har fyllt i en kupong (genom att kryssa för 8 matcher), på hur många sätt kan man då sudda bort ett av kryssen och i stället kryssa för en annan match? Hur många olika rader finns det som har 7 rätt?

8. Rita två grafer som har lika många noder och lika många kanter, men ändå inte är isomorfa. Motivera att de inte är isomorfa genom att ange en egenskap som den ena grafen har, men inte den andra.