

Tentamen i Diskret Matematik MVE070, 2015-04-17

Examinator: Johan Wästlund, tel 073-500 25 83.

Tillåtna hjälpmedel: Handskriven "formelsamling" på ett A4-ark (2 sidor).

Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng (inklusive bonuspoäng).

På uppgift 1 och 2 krävs endast kortfattade motiveringar, men alla svar ska motiveras!

1. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna:

- (a) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.
- (b) Den satslogiska utsagan $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ är en tautologi.
- (c) Det finns oändligt många primtal.
- (d) Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ som ges av $f(x) = x^4$ är injektiv.
- (e)

$$\sum_{n=1}^3 2^n = \sum_{n=1}^3 n^2.$$

2. Bestäm antalet element i följande mängder:

- (a) $\{1, 3, 3, 1\}$.
- (b) $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{6, 5, 4, 3, 2\}$.
- (c) $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\}$.
- (d) $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$.
- (e) Potensmängden till $\{1, 2, 3\}$.

3. Vi definierar en operation $\star$ på heltalen genom $a \star b = (a-1)(b-1) + 1$.
Undersök om denna operation är
(a) Kommutativ, (b) Associativ.
4. Bevisa, till exempel genom induktion, att

$$\sum_{k=1}^n k^2 \leq n^3.$$

5. Vilka av följande ekvationer har lösningar i heltal?
- (a) $246x + 835y = 129$.
(b) $x^2 + y^2 = 61$.
(c) $x^2 - 7y^2 = 61$.
6. (a) Bestäm det minsta positiva heltal som är kongruent med 2^{30} modulo 31.
(b) Bestäm det minsta positiva heltal som är kongruent med 2^{34} modulo 35.
7. Hur många delmängder med 3 element har mängden $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$?
Hur många av dessa har egenskapen att ingen differens mellan två av de tre elementen är delbar med 3?
8. Finns det någon graf som har 12 noder, och där varje nod har grad 3 (dvs tre kanter)? Finns det någon graf med 13 noder där varje nod har grad 3?