

Hemdugga 2, Diskret Matematik MVE070, februari 2016

Examinator: Johan Wästlund

Lämnas in senast vid övningen den 29 mars.

1. Den här uppgiften går ut på att kritisera och reparera ett felaktigt induktionsbevis.

Påstående: Om n är ett positivt heltal, så är $3^n \equiv 27 \pmod{54}$.

“Bevis”:

Antag för ett godtyckligt positivt heltal p att $3^p \equiv 27 \pmod{54}$. Då är $3^{p+1} = 3^p \cdot 3 \equiv 27 \cdot 3 = 81 \equiv 27 \pmod{54}$. Enligt induktionsprincipen gäller därför påståendet.

- (a) I vilket steg i uträkningen används induktionsantagandet?
 - (b) Visa att påståendet inte är sant.
 - (c) Stämmer det att $3^{1000} \equiv 27 \pmod{54}$?
 - (d) Hur kan resonemanget repareras?
2. Låt a_n vara antalet binära strängar av längd n där ettorna endast förekommer i block om exakt två ettor i rad. Varje etta ska alltså ha en annan etta antingen före eller efter sig, men inte både före och efter. Vi tänker oss att det finns en sträng av längd 0, den “tomma” strängen. Därför är $a_0 = 1$.
 - (a) Beräkna a_1 , a_2 och a_3 .
 - (b) Ställ upp en rekursiv karakterisering av talföljden a_n . Ledtråd: Det ska vara en rekursion som liknar fibonaccitalens definition.
 - (c) Beräkna a_{10} .

3. Nisse, Lisa och Kalle ska spela yatzy. De slår först om vem som ska börja. Var och en kastar alltså en sexsidig tärning, och det är meningen att den som får högst ska börja själva spelet. Vad är sannolikheten att ingen av dem ensam får högst, dvs att två eller alla tre får det högsta talet?

Ledtråd: Det finns totalt $6^3 = 216$ olika utfall. Försök att på något strukturerat sätt räkna de utfall där det blir oavgjort. Det finns flera olika sätt att resonera.

4. Vi konstruerar en graf G genom att låta hörnen vara binära strängar av längd 3, med en kant mellan två hörn om strängarna skiljer sig åt på exakt en position.
- (a) Rita grafen G !
 - (b) Har G någon hamiltoncykel? Fundera på om en hamiltoncykel till G har att göra med något vi pratat om tidigare i kursen!
 - (c) Hur många kanter skulle man behöva ta bort ur G för att få en graf utan hamiltoncykel?