MATEMATIK | **Hjälpmedel: bifogat formelblad, utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2008-10-20 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Aron Lagerberg
tel. 0762-721860

MVE085 Flervariabelanalys V2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 08/09 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 21/10. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. (a) Definiera begreppet *kurvintegr*al av en funktion över en kurva dvs. $\int_{\mathcal{C}} f(x,y)ds$. (1p)

(b) Låt $\mathcal{C}$ vara randen till det område i xy-planet som begränsas av linjen $y = x$ och parabeln $y = x^2$, orienterad moturs. Beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} xydx + (x+y)dy$ genom att parametrisera randbitarna och använda definitionen av kurvintegral. (3p)

(c) Använd Greens formel för att beräkna kurvintegralen i deluppgift (b). (3p)

3. (a) Ange Jacobideterminanten $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ vid övergång till polära koordinater: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ (1p)

(b) Låt D vara området $x^2 + y^2 \leq 4$. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (8 - 2x^2 - 2y^2)dxdy$ genom övergång till polära koordinater. (3p)

(c) Visa att volymen av kroppen som begränsas av de två paraboloiderna $z = 8 - x^2 - y^2$ och $z = x^2 + y^2$ kan beräknas med integralen i deluppgift (b). (1p)

4. (a) Bestäm de kritiska (stationära) punkterna för funktionen $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$? Bestäm, för var och en av de kritiska punkterna, dess karaktär (lokalt max., lokalt min., sadelpunkt). (4p)

(b) Redogör för hur man bestämmer största och minsta värde för funktionen f i deluppgift (a) under bivillkoret $(1+x^2)(1+y^2) = 2$ med Lagranges multiplikatormetod. Erhållet ekvationssystem behöver *ej* lösas. (2p)

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (4p)

(a) Alla källfria vektorfält är också konservativa.

(b) Om f är differentierbar i punkten (a,b) så är $D_{-\mathbf{v}}f(a,b) = -D_{\mathbf{v}}f(a,b)$ för alla enhetsvektorer $\mathbf{v}$.

(c) För alla integrerbara funktioner gäller: $\int_0^1 \left(\int_0^y f(x,y)dx\right) dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy$.

(d) Om $P_2(x,y) = x^2 + y^2$ är Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(0,0)$ till en funktion $f(x,y)$ så är $(0,0)$ kritisk/stationär punkt till f.

Del 2: Överbetygsdelen

Uppgifterna i denna del rättas och bedöms endast om den första delen är godkänd.

6. Ekvationssystemet $\begin{cases} x = u^3 + v^3 \\ y = u - v \end{cases}$ definierar implicit u och v som funktioner av x och y. (6p)

Bestäm $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ i punkten $(x, y) = (0, 2)$ (vilket motsvaras av $(u, v) = (1, -1)$).

7. Låt $\mathcal{S}$ vara den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som ligger mellan planen $z = \sqrt{2}$ och $z = 2$.

(a) Bestäm massan av $\mathcal{S}$ då densiteten i varje punkt på ytan ges av $\rho(x, y, z) = z$. (3p)

(b) Bestäm flödet av $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ uppåt (i positiv z-led) genom ytan $\mathcal{S}$. (3p)

8. Välj **en** av följande två deluppgifter (om det i dina lösningarna finns något redovisat från båda deluppgifterna så granskas endast den först redovisade). (6p)

(a) Förklara vad det innebär att en funktion $f(x, y)$ är integrerbar över en rektangel $R: \ a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$, samt formulera och bevisa medelvärdessatsen för dubbelintegraler.

(b) Redogör för och motivera hur man kan beräkna flöde av ett vektorfält genom en orienterad yta samt formulera divergenssatsen och förklara hur divergensen kan tolkas som flödestäthet.

Lycka till!
Thomas W

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V, 081020	sid.nummer	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm normalvektor och normalens ekvation till nivåkurvan $xe^{xy-2} = 2$ i punkten$(2, 1)$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Uttryck $\frac{\partial}{\partial x} f(x^2y, xy^2)$ i de partiella derivatorna av f. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Bestäm en ekvation för tangentplanet till funktionsytan $z = 3x^2y - 2x + 1$ i punkten $(0, 2, 1)$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Är vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + 1)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ konservativt? Bestäm i så fall en potential till $\mathbf{F}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad för MVE085 08/09

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos2x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin2x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{x2+a2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x2+a}} dx = \ln|x+\sqrt{x2+a}| + C \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x2+a} + a\ln|x+\sqrt{x2+a}|) + C$$

$$\int \frac{1}{(x2+1)^n} dx = I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right) x^k + x^{n+1}B(x) \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + x^{n+1}B(x) \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + x^{2n+1}B(x) \qquad |x| \leq 1$$

$$\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 1} \qquad \left(\begin{array}{c}\alpha\\ 0\end{array}\right) = 1$$

Övrigt

Tyngdpunkten (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.