MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, utdelad ordlista, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2008-10-20 kl. 14.00 - 18.00

Tentamen Telefonvakt: Aron Lagerberg

tel. 0762-721860

MVE085 Flervariabelanalys V2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 08/09 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida 21/10. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. (a) Definiera begreppet *kurvintegr*al av en funktion över en kurva dvs. $\int_{\mathcal{C}} f(x,y)ds$. (1p)

Definition: se sid 821

(b) Låt $\mathcal{C}$ vara randen till det område i xy-planet som begränsas av linjen $y = x$ och parabeln $y = x^2$, orienterad moturs. Beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} xydx + (x+y)dy$ genom att parametrisera randbitarna och använda definitionen av kurvintegral. (3p)

Lösning: Låt $\mathcal{C}_1$ vara parabelbågen $y = x^2$ från punkten $(0,0)$ till $(1,1)$ och låt $\mathcal{C}_2$ vara det räta linjestycket från punkten $(1,1)$ till $(0,0)$. Då har vi

$$\oint_{\mathcal{C}_1} xydx + (x+y)dy = \int_0^1 x \cdot x^2 dx + (x + x^2)2xdx =$$

$$= \int_0^1 3x^3 + 2x^2 dx = \left[\frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{17}{12}$$

och

$$\oint_{\mathcal{C}_2} xydx + (x+y)dy = \int_1^0 x \cdot xdx + (x + x)dx =$$

$$= \int_1^0 x^2 + 2xdx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_1^0 = -\frac{4}{3}$$

så

$$\oint_{\mathcal{C}} xydx + (x+y)dy = \oint_{\mathcal{C}_1} xydx + (x+y)dy + \oint_{\mathcal{C}_2} xydx + (x+y)dy = \frac{17}{12} - \frac{4}{3} = \frac{1}{12}$$

Svar: $\oint_{\mathcal{C}} xydx + (x+y)dy = \frac{1}{12}$

(c) Använd Greens formel för att beräkna kurvintegralen i deluppgift (b). (3p)

Lösning: Låt D vara det område som begränsas av linjen $y = x$ och parabeln $y = x^2$. Green formel ger då att

$$\oint_{\mathcal{C}} xydx + (x+y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right) dxdy =$$

$$= \iint_D (1-x)dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1-x)dydx = \int_0^1 (1-x)(x-x^2)dx =$$
$$= \int_0^1 (x-2x^2+x^3)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Svar: $\oint_C xydx + (x+y)dy = \frac{1}{12}$

3. (a) Ange Jacobideterminanten $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ vid övergång till polära koordinater: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ (1p)

Svar: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$

(b) Låt D vara området $x^2+y^2 \le 4$. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (8-2x^2-2y^2)dxdy$ genom övergång till polära koordinater. (3p)

Lösning: $\iint_D (8-2x^2-2y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8-2r^2)rdrd\theta = 2\pi\left[4r^2 - \frac{1}{2}r^4\right]_0^2 = 16\pi$

Svar: $\iint_D (8-2x^2-2y^2)dxdy = 16\pi$

(c) Visa att volymen av kroppen som begränsas av de två paraboloiderna $z = 8-x^2-y^2$ och $z = x^2+y^2$ kan beräknas med integralen i deluppgift (b). (1p)

Lösning: Paraboloiderna $z = 8-x^2-y^2$ och $z = x^2+y^2$ skär varandra där $8-x^2-y^2 = x^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4$. På området $x^2+y^2 \le 4$ begränsas kroppen uppåt av ytan $z = 8-x^2-y^2$ och nedåt av ytan $z = x^2+y^2$ så

$$Volymen = \iint_D \big((8-x^2-y^2)-(x^2+y^2)\big)\,dxdy = \iint_D (8-2x^2-2y^2)dxdy$$

4. (a) Bestäm de kritiska (stationära) punkterna för funktionen $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$? (4p)
Bestäm, för var och en av de kritiska punkterna, dess karaktär (lokalt max., lokalt min., sadelpunkt).

Lösning: $\nabla f(x,y) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-3x^2-3y^2 &= 0 \\ -6xy &= 0 \end{cases}$
Den andra ekvationen (dvs $-6xy = 0$) är uppfylld om $x = 0$ eller $y = 0$. Med $x = 0$ i den första ekvationen (dvs $3-3x^2-3y^2 = 0$) så får vi att $3-3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$. Med $y = 0$ i den första ekvationen så får vi p.s.s. att $x = \pm 1$, så de kritiska punkterna till funktionen $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$ är $(0,\pm 1)$ och $(\pm 1, 0)$.
För att avgöra karaktären på de kritiska punkterna så undersöker vi Hessianen i respektive punkt. Hessianen till $f(x,y)$ är $\mathscr{H}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix}$.
$\mathscr{H}(0,\pm 1) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 6 \\ \pm 6 & 0 \end{bmatrix}$ är indefinit ty $det(\mathscr{H}(0,\pm 1)) < 0$, så $(0,\pm 1)$ är sadelpunkter.
$\mathscr{H}(1,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ är negativt definit ty $det(\mathscr{H}(1,0)) > 0$ och $f_{11}(1,0) = -6 < 0$, så f har ett lokalt maximum i $(1,0)$.
$\mathscr{H}(-1,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ är positivt definit ty $det(\mathscr{H}(-1,0)) > 0$ och $f_{11}(-1,0) = 6 > 0$, så f har ett lokalt minimum i $(-1,0)$.

Svar: Funktionens kritiska punkter är $(0,\pm 1)$ och $(\pm 1,0)$, varav funktionen har ett lokalt maximum i $(1,0)$, minimum i $(-1,0)$ och sadelpunkter i $(0,\pm 1)$.

(b) Redogör för hur man bestämmer största och minsta värde för funktionen f i deluppgift (a) under bivillkoret $(1+x^2)(1+y^2)=2$ med Lagranges multiplikatormetod. Erhållet ekvationssystem behöver *ej* lösas. (2p)

Lösning: (Funktionen har ett största och minsta värde under bivillkoret $(1+x^2)(1+y^2)=2$, eftersom f är en kontinuerlig funktion och de (x,y) för vilket $(1+x^2)(1+y^2)=2$ utgör en sluten och begränsad mängd i xy-planet (se sats 2 sid 708)).

Enligt Lagrange multiplikatormetod så har en funktion $f(x,y)$ sitt största (och minsta värde), under ett bivillkor av typen $g(x,y)=0$, i en kritisk punkt till Lagrangefunktionen $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$. I detta fall är $g(x,y)=(1+x^2)(1+y^2)-2$ så

$$\nabla L(x,y,\lambda)=\mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3-3x^2-3y^2+\lambda 2x(1+y^2) & = & 0 \\ -6xy+\lambda 2y(1+x^2) & = & 0 \\ (1+x^2)(1+y^2)-2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Genom att lösa detta ekvationssystem (t.ex. numeriskt med Newtons metod) så får vi kandidater på punkter för vilket funktionen har sitt största resp. minsta värde, under det givna bivillkoret. Sedan är det bara att beräkna funktionsvärdena i resp. lösningspunkt och ta ut det största resp. minsta av dessa.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (4p)

(a) Alla källfria vektorfält är också konservativa.

Svar: Falskt

(b) Om f är differentierbar i punkten (a,b) så är $D_{-\mathbf{v}}f(a,b)=-D_{\mathbf{v}}f(a,b)$ för alla enhetsvektorer $\mathbf{v}$.

Svar: Sant

(c) För alla integrerbara funktioner gäller: $\int_0^1 \left(\int_0^y f(x,y)dx\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy$.

Svar: Falskt

(d) Om $P_2(x,y)=x^2+y^2$ är Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(0,0)$ till en funktion $f(x,y)$ så är $(0,0)$ kritisk/stationär punkt till f.

Svar: Sant

Del 2: Överbetygsdelen

Uppgifterna i denna del rättas och bedöms endast om den första delen är godkänd.

6. Ekvationssystemet $\left\{\begin{array}{l} x=u^3+v^3 \\ y=u-v \end{array}\right.$ definierar implicit u och v som funktioner av x och y. (6p)
Bestäm $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ i punkten $(x,y)=(0,2)$ (vilket motsvaras av $(u,v)=(1,-1)$).

Lösning: Låt $\mathbf{f}$ vara den avbildning som avbildar $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ på $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ genom sambanden $\left\{\begin{array}{l} x=u^3+v^3 \\ y=u-v \end{array}\right.$. Jacobimatrisen för denna avbildning är $D\mathbf{f}(u,v)=\begin{bmatrix} 3u^2 & 3v^2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ och spec. är

$D\mathbf{f}(1,-1) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Jacobimatrisen för den inversa avbildningen $\mathbf{f}^{-1}$ dvs. $D\mathbf{f}^{-1}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$ är inversen till Jacobimatrisen för $\mathbf{f}$ så $D\mathbf{f}^{-1}(0,2) = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (observera att $\mathbf{f}(1,-1) = (0,2)$). Speciellt följer det att $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{6}$ och att $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = det(D\mathbf{f}^{-1}(0,2)) = \dfrac{1}{36}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -\dfrac{6}{36} = -\dfrac{1}{6}$ (alternativt får vi att $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \dfrac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} = -\dfrac{1}{6}$)

Svar: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{6}$ och $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\dfrac{1}{6}$, i punkten $(x,y) = (0,2)$

7. Låt $\mathcal{S}$ vara den del av sfären $x^2+y^2+z^2=4$ som ligger mellan planen $z=\sqrt{2}$ och $z=2$.

(a) Bestäm massan av $\mathcal{S}$ då densiteten i varje punkt på ytan ges av $\rho(x,y,z)=z$. (3p)

Lösning: Planet $z=\sqrt{2}$ skär sfären $x^2+y^2+z^2=4$ längs cirkeln $x^2+y^2=2, z=\sqrt{2}$. Vinkeln mellan z-axeln och ortsvektorn till en punkt på denna cirkel är $\frac{\pi}{4}$, så i sfäriska koordinater $\begin{cases} x = 2\sin\phi\cos\theta \\ y = 2\sin\phi\sin\theta \\ z = 2\cos\phi \end{cases}$ ges $\mathcal{S}$ av de (ϕ,θ) för vilket $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$ och $0 \le \theta \le 2\pi$

$$Massan = \iint_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \underbrace{2\cos\phi}_{z} \cdot \underbrace{2^2\sin\phi d\phi d\theta}_{dS} = 8\pi\left[\sin^2\phi\right]_0^{\pi/4} = 4\pi$$

Alternativt kan vi betrakta sfären som en nivåyta till funktionen $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ och använda att $dS = \dfrac{|\nabla g|}{|g_3|}dxdy = \dfrac{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2z}dxdy = \dfrac{2}{z}dxdy$ på $\mathcal{S}$, så

$$\text{Massan} = \iint_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)dS = \iint_{x^2+y^2\le 2} z\cdot\frac{2}{z}dxdy = 2\iint_{x^2+y^2\le 2} dxdy = 2\cdot 2\pi = 4\pi$$

Svar: Massan av $\mathcal{S}$ är 4π

(b) Bestäm flödet av $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ uppåt (i positiv z-led) genom ytan $\mathcal{S}$. (3p)

Lösning: Den uppåtriktade normalvektorn till ytan $\mathcal{S} : \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{g(x,y,z)} = 4$ ges av

$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}} = \frac{1}{2}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$, så $\mathbf{F}\bullet\mathbf{n} = \frac{1}{2}z^3$ och

$$\text{Flödet genom ytan } \mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}dS = \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{2}z^3 dS$$

Denna integral kan beräknas på ett liknande sätt som integralen i deluppgift (a). T.ex. med övergång till sfäriska koordinater får vi

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{2}z^3 dS = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \underbrace{8\cos^3\phi}_{z^3} \cdot \underbrace{2^2\sin\phi d\phi d\theta}_{dS} = 8\pi\left[-\cos^4\phi\right]_0^{\pi/4} = 8\pi(1-\frac{1}{4}) = 6\pi$$

Man kan också använda Gauss divergens sats för att beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}dS$, men det leder i detta fall inte till någon arbetsbesparing. I sådana fall får vi lägga till och dra ifrån flödet genom cirkelskivan $\mathcal{S}_0 : x^2+y^2 \le 2, z=\sqrt{2}$ och betrakta $\mathcal{S}$ och $\mathcal{S}_0$ som randen till området $D : x^2+y^2+z^2 \le 4, \sqrt{2} \le z \le 2$. Eftersom $\mathbf{F}\bullet\mathbf{n} = \mathbf{F}\bullet(-\mathbf{k}) = -z^2 = -2$ på $\mathcal{S}_0$ så får vi att

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}dS = \iiint_D div(\mathbf{F})dxdydz - \iint_{\mathcal{S}_0} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}dS =$$

$$= \iiint_D 2z dx dy dz + \iint_{\mathcal{S}_0} 2dS = \iint_{x^2+y^2\leq 2} \left(\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 2z dz \right) dx dy + 4\pi =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 2} \left(2 - x^2 - y^2\right) dx dy + 4\pi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - r^2\right) r dr d\theta + 4\pi =$$

$$= 2\pi \left[r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^{\sqrt{2}} + 4\pi = 2\pi + 4\pi = 6\pi$$

Svar: Flödet genom $\mathcal{S}$ är 6π

8. Välj **en** av följande två deluppgifter (om det i dina lösningarna finns något redovisat från båda deluppgifterna så granskas endast den först redovisade). (6p)

(a) Förklara vad det innebär att en funktion $f(x, y)$ är integrerbar över en rektangel $R: \ a \leq x \leq b, \ \ c \leq y \leq d$, samt formulera och bevisa medelvärdessatsen för dubbelintegraler.

Lösning: se sid 755 & 756 resp. sid 769 & 770

(b) Redogör för och motivera hur man kan beräkna flöde av ett vektorfält genom en orienterad yta samt formulera divergenssatsen och förklara hur divergensen kan tolkas som flödestäthet.

Lösning: se sid 844, 868 resp. sats 1 sid 852

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V, 081020	sid.nummer	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (2p)

Lösning:

Övergång till polära koordinater ger att

$$\frac{x^3 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^3 \cos^3 \theta - r^2}{r^2} = r \cos^3 \theta - 1 \to -1 \ , \text{ då } r \to 0$$

Svar: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1$

(b) Bestäm normalvektor och normalens ekvation till nivåkurvan $xe^{xy-2} = 2$ i punkten$(2, 1)$. (2p)

Lösning:

Gradienten till $g(x, y) = xe^{xy-2}$, dvs $\nabla g(x, y) = e^{xy-2}(1 + xy)\mathbf{i} + x^2 e^{xy-2}\mathbf{j}$, ger en normalvektor till nivåkurvan $g(x, y) = 2$. Spec. är $\nabla g(2, 1) = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ en normalvektor till nivåkurvan i punkten $(2, 1)$. Normalen i punkten $(2, 1)$, dvs linjen genom $(2, 1)$ med normalvektorn som riktningsvektor, ges av $\dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y - 1}{4} \Leftrightarrow 4x - 3y = 5$

Svar: $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ är en normalvektor och en ekvation för normalen är $4x - 3y = 5$

(c) Uttryck $\frac{\partial}{\partial x} f(x^2 y, xy^2)$ i de partiella derivatorna av f. (2p)

Lösning:

Svar: $2xyf_1(x^2 y, xy^2) + y^2 f_2(x^2 y, xy^2)$

(d) Bestäm en ekvation för tangentplanet till funktionsytan $z = 3x^2 y - 2x + 1$ i punkten $(0, 2, 1)$. (2p)

Lösning:

Med $f(x, y) = 3x^2 y - 2x + 1$ så är $f_1(x, y) = 6xy - 2$ och $f_2(x, y) = 3x^2$ och speciellt är $f_1(0, 2) = -2$ och $f_2(0, 2) = 0$, vilket insatt i den allmänna formen för tangentplanets ekvation ger $z = f(0, 2) + f_1(0, 2)(x - 0) + f_2(0, 2)(y - 2) \Leftrightarrow z = 1 - 2x$

Svar: Tangentplanets ekvation är $z = 1 - 2x$

(e) Är vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + 1)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ konservativt? Bestäm i så fall en potential till $\mathbf{F}$. (2p)

Lösning:

Ja, vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = \underbrace{(2xy + 1)}_{P(x,y)}\mathbf{i} + \underbrace{x^2}_{Q(x,y)}\mathbf{j}$ är konservativt i hela xy-planet, ty $\dfrac{\partial}{\partial x}(Q(x, y)) = 2x = \dfrac{\partial}{\partial y}(P(x, y))$ för alla x och y (se sats 4 sid 860). Alternativt följer det att $\mathbf{F}$ är konservativt om vi lyckas hitta en potential till $\mathbf{F}$ dvs. en funktion $\Phi(x, y)$ sådan att $\nabla\Phi = \mathbf{F}$. Om Φ är en potential till $\mathbf{F}$ så är $\begin{cases} \Phi_1(x, y) = 2xy + 1 \\ \Phi_2(x, y) = x^2 \end{cases}$. Av den första ekvationen följer det att $\Phi(x, y) = x^2 y + x + g(y)$ för någon funktion g som bara beror av y. Deriverar vi denna identitet m.a.p. y så får vi att $\Phi_2(x, y) = x^2 + g'(y)$. Tillsammans med den andra ekvationen, dvs. $\Phi_2(x, y) = x^2$, följer det nu att $g'(y) = 0$, dvs $g(y) = C$ för någon konstant C.

Svar: Ja, vektorfältet är konservativt och en potential är $\Phi(x, y) = x^2 y + x$