MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 100115 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt: Ida Säfström
Telefon: 0703 088 304

MVE085 Flervariabelanalys V2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 09/10 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Temperaturen $T(x, y)$ (mätt i $°C$) i punkter i xy-planet ges av $T(x, y) = 4x^2 + y^2$. (6p)

(a) Skissa den nivåkurva $T(x, y) = k$, som går genom punkten $(2, 3)$.

(b) I vilken riktning från $(2, 3)$ ökar temperaturen snabbast?

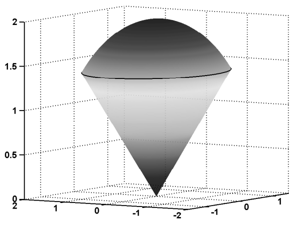
(c) Hur stor är temperaturökningshastigheten (i grader per längdenhet) i punkten $(2, 3)$ i riktningen du angav ovan?

(d) Bestäm temperaturökningshastigheten (i grader per tidsenhet) vid en förflyttning med farten 3 (längdenhet per tidsenhet) från punkten $(2, 3)$ i riktningen som ges av $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

(e) Ange en parametriserad kurva (en rät linje duger) som går genom punkten $(2, 3)$ och där har farten 3 och hastighetsvektorn parallell med $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

3. Beräkna massan

$$m = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$$



och masscentrums z-koordinat

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_D z(x^2 + y^2 + z^2)\, dV$$ (6p)

då D är kroppen som ges av $\sqrt{x^2 + y^2} \le z,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ och densiteten $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. (Sfärisk substitution rekommenderas.)

4. $\mathcal{S}$ är halvsfären $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \le 4$, med uppåtriktad normalvektor. Beräkna ytintegralen $\iint_{\mathcal{S}} z^2\, dS$. (6p)

Överbetygsdelen finns på baksidan av detta blad

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{ye^{xy}}{x} dA$ då D är området i xy-planets första kvadrant begränsat av kurvorna $xy = 1,\ xy = 3,\ y = x$ och $y = 4x$. (6p)

6. Beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2}$ då $\mathcal{C}$ är den positivt orienterade randen till området $1 \le x^2 + y^2,\ x^2 + 4y^2 \le 9$. Visa sedan att kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = 2\pi$ för alla kurvor $\mathcal{C}$ som går ett varv moturs runt origo. (6p)

7. Definiera begreppet gränsvärde för en funktion av två variabler. Bevisa sedan, genom direkt tillämpning av definitionen, att funktionen $f(x, y) = 3x + 2y$ har gränsvärdet 7 då (x, y) går mot $(1, 2)$. (6p)

Ge exempel på funktion av två variabler, som saknar gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$ men där alla gränsvärden $f(x, kx)$, då $x \to 0$, samt $f(0, y)$, då $y \to 0$, existerar och är lika. Visa att din funktion uppfyller villkoren.

Lycka till!
Thomas W

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 100115	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, -1, 1)$ till funktionsytan $z = \frac{2x}{x^2+y^2}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Visa att $(-1, -1)$ är kritisk punkt till $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ och bestäm punktens karaktär. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Antag att f har kontinuerliga partiella derivator av alla ordningar. Bestäm $\frac{\partial}{\partial r} f(r\cos t, r\sin t)$ och $\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} f(r\cos t, r\sin t)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna dubbelintegralen $\iint_D xe^y \, dA$ då D är området $0 \le x \le 1, 0 \le y \le x$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} (\sin x + 3y)\, dx + (e^{-y} - 2x)\, dy$ då $\mathcal{C}$ är randen till området $D: \ x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0$ ett varv moturs. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad för TMA043 och MVE085 09/10

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1 \qquad\qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad\qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = \tan x + C \qquad\qquad \int \frac{1}{sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad\qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0 \qquad\qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0 \qquad\qquad \int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0 \qquad\qquad \int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.