Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2010-10-21 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Ida Säfström , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

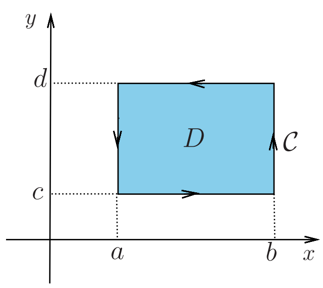
Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Ange på formen $y = g(x)$ den kurva i planet som går genom $(1,1)$ och är vinkelrät mot alla nivåkurvor till $f(x,y) = x^4 + 4y^2$ (6p)

7. Ange (på valfri form) tangentlinjen till skärningskurvan mellan de två ytorna $z = 2 - x^2 - 2y^2$ och $xz^2 - y = 1$ i punkten $(1,0,1)$ (6p)

8. Formulera Greens formel och bevisa den i specialfallet då kurvan $\mathcal{C}$ omsluter en axelparallell rektangel $D : a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. (6p)



Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 10/11

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \;,\; 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \;,\; a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \;,\; a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2010-10-21	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x, y) = x^4 - 3xy$ i punkten $(1, 1)$ och i riktningen $\mathbf{u} = \frac{1}{5}(4, 3)$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Visa att $P = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ är en kritisk punkt till $f(x, y) = 2y^3 - 2x^2y + 3x^2 - 9y$ och avgör om funktionen f antar ett lokalt max eller min i P, eller om P är en sadelpunkt. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 + xz$. Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 7$ i punkten $(3, 2, 1)$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Använd Lagrange multiplikatormetod för att bestämma det kortaste avståndet mellan origo och kurvan $y = x^2 - 1$ (5p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2010-10-21	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

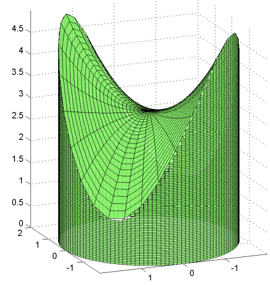
3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna dubbelintegralen $\iint_D e^{y/x}\,dxdy$ då D är området $0 < x < 1, 0 < y < x$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna volymen av kroppen $K : x^2 + y^2 \leq 4\ ,\ 0 \leq z \leq xy + 3$ (se figur) (3p)



Lösning:

Svar: ....

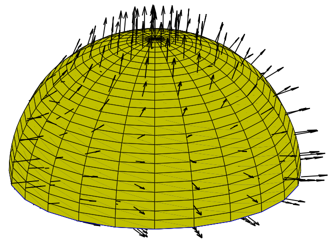
Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (6p)

(a) Visa att vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt genom att bestämma en potential ϕ till $\mathbf{F}$

(b) Antag att en partikel rör sig längs med kurvan $\mathbf{r} = t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ från origo till punkten $(1, 1, 1)$. Beräkna det arbete $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ som kraftfältet $\mathbf{F}$ uträttar på partikeln, dels genom att använda potentialen från deluppgift (a) och dels genom att utgå från definitionen av kurvintegral.

5. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ (6p)



(a) Beräkna divergensen av $\mathbf{F}$

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut ur området $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\ ,\ z \geq 0$