Lösningsförslag till tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2010-10-21 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Ida Säfström , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Ange på formen $y = g(x)$ den kurva i planet som går genom $(1, 1)$ och är vinkelrät mot alla nivåkurvor till $f(x, y) = x^4 + 4y^2$ (6p)

Lösning Vi vet att gradienten till $f(x, y)$ i en punkt (a, b) är vinkelrät mot f:s nivåkurva genom (a, b). Vi vet också att om $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + g(x)\mathbf{j}$ är en parametrisering av den sökta kurvan så är $\mathbf{r}'(x)$ en tangentvektor till kurvan. Eftersom vi vill att denna tangentvektor skall vara vinkelrät mot nivåkurvorna så skall alltså $\mathbf{r}'(x)$ ha samma rikting som gradienten $\nabla f(x, g(x))$ dvs. $\mathbf{r}'(x) = \lambda(x)\nabla f(x, g(x))$ för någon funktion $\lambda(x)$. Identifierar vi komponenterna framför $\mathbf{i}$ resp $\mathbf{j}$ i båda led får vi att $1 = \lambda(x)4x^3$ och $g'(x) = \lambda(x)8g(x)$. Löser vi ut $\lambda(x)$ ur den första ekvationen och sätter in i den andra får vi

$$g'(x) = \frac{2}{x^3}g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g'(x) - \frac{2}{x^3}g(x) = 0$$

Detta är en linjär differentialekvation av första ordningen som t.ex. kan lösas genom multiplikation med integrerande faktor. En integrerande faktor är i detta fallet e^{1/x^2} så differentialekvationen kan skrivas;

$$\frac{d}{dx}\left(g(x)e^{\frac{1}{x^2}}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x)e^{\frac{1}{x^2}} = C \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = Ce^{\frac{-1}{x^2}}$$

Vi är nu speciellt intresserade av den (ortogonal-) kurva som går genom $(1, 1)$ så vi söker den lösning $g(x) = Ce^{\frac{-1}{x^2}}$ som är sådan att $g(1) = 1$. Insättning ger att $1 = Ce^{-1}$ dvs.

$C = e$, vilket ger oss lösningen $y = e^{1-\frac{1}{x^2}}$

Anm. Man kan också komma fram till differentialekvationen ovan genom att notera att den kurva som söks helt enkelt är fältlinjen genom $(1,1)$ till det konservativa vektorfält som har $f(x,y)$ som potential. Från avsnitt 15.1 i kursboken vet vi att fältlinjens ekvation ges av;

$$\frac{dx}{f_1(x,y)} = \frac{dy}{f_2(x,y)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{4x^3} = \frac{dy}{8y} \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = -\frac{1}{x^2} + D \quad \Leftrightarrow \quad y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}$$

Sedan bestäms konstanten C som ovan.

Svar: $y = e^{1-\frac{1}{x^2}}$

7. Ange (på valfri form) tangentlinjen till skärningskurvan mellan de två ytorna $z = 2 - x^2 - 2y^2$ och $xz^2 - y = 1$ i punkten $(1,0,1)$ (6p)

Lösning Ytorna kan betraktas som nivåytor till funktionerna $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z$ resp. $g(x,y,z) = xz^2 - y$. Gradienterna $\nabla f(1,0,1) = (2,0,1)$ och $\nabla g(1,0,1) = (1,-1,2)$ är vinkelräta mot resp. yta i $(1,0,1)$ så deras vektorprodukt ger en riktningsvektor för tangentlinjen. Vi får;

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Tangentlinjen beskrivs således (på parameterform) av;

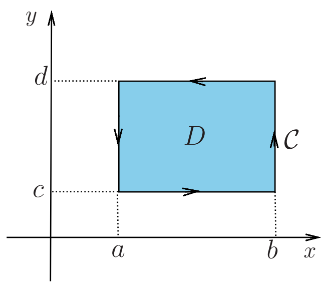
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 - 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

Alternativ lösning 1: Den sökta tangentlinjen är skärninglinjen mellan tangentplanen till de båda ytorna i den givna punkten. Tangentplanens normalvektorer dvs. $(2,0,1)$ resp. $(1,-1,2)$ kan tas fram som i ovanstående lösning varpå vi kan ställa upp ekvationerna $2(x-1)+0y+(z-1) = 0$ resp. $(x-1)-y+2(z-1) = 0$ för tangentplanen. Skärningslinjen ges av de punkter som ligger i båda planen dvs. uppfyller båda ekvationerna;

$$\begin{cases} 2(x-1) + 0y + (z-1) = 0 \\ (x-1) - y + 2(z-1) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + z = 3 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = 3 - 3t \\ z = 3 - 2t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

Alternativ lösning 2: Om vi använder x som parameter i en parametrisering av skärningskurvan så gäller att $z(x) = 2 - x^2 - 2y(x)^2$ och $xz(x)^2 - y(x) = 1$. Deriverar vi båda led i båda ekvationerna m.a.p. x så får vi $z'(x) = -2x - 4y(x)y'(x)$ och $z(x)^2 + 2xz(x)z'(x) - y'(x) = 0$. Speciellt i punkten $(1,0,1)$ gäller att $z'(1) = -2$ och $1 + 2z'(1) - y'(1) = 0$, vilket ger oss tangentvektorn $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Med hjälp av tangentvektorn kan vi sedan enkelt beskriva tangentlinjen (se ovan).

8. Formulera Greens formel och bevisa den i specialfallet då kurvan $\mathcal{C}$ omsluter en axelparallell rektangel $D : a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. (6p)



Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2010-10-21	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x,y) = x^4 - 3xy$ i punkten $(1,1)$ och i riktningen $\mathbf{u} = \frac{1}{5}(4,3)$ (3p)

Lösning: Gradienten av f är $\nabla f(x,y) = (4x^3 - 3y)\mathbf{i} - 3x\mathbf{j}$. Speciellt får vi att $\nabla f(1,2) = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ så riktningsderivatan av f i den givna punkten och riktningen är;

$$D_{\mathbf{u}}f(1,1) = \nabla f(1,2) \bullet \mathbf{u} = (1,-3) \bullet \frac{1}{5}(4,3) = -1$$

Svar: Den efterfrågade riktningsderivatan är -1

(b) Visa att $P = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ är en kritisk punkt till $f(x,y) = 2y^3 - 2x^2y + 3x^2 - 9y$ och avgör om funktionen f antar ett lokalt max eller min i P, eller om P är en sadelpunkt. (3p)

Lösning: Gradienten av f är $\nabla f(x,y) = (-4xy + 6x)\mathbf{i} + (6y^2 - 2x^2 - 9)\mathbf{j}$. Speciellt får vi att $\nabla f(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \mathbf{0}$ vilket visar att $P = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ är en kritisk punkt. För att bestämma punktens karaktär studerar vi Hessianen av f i punkten. Vi får att;

$$\mathscr{H}(x,y) = \begin{bmatrix} -4y+6 & -4x \\ -4x & 12y \end{bmatrix} \text{ och speciellt är } \mathscr{H}(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$$

Matrisen $\mathscr{H}(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ är indefinit ty $det(\mathscr{H}(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})) = -36 < 0$ så $P = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ är en sadelpunkt.

Svar: P är en sadelpunkt

(c) Låt $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 + xz$. Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $f(x,y,z) = 7$ i punkten $(3,2,1)$ (3p)

Lösning: Gradienten av f är $\nabla f(x,y,z) = (2x+z)\mathbf{i} - 4y\mathbf{j} + (6z+x)\mathbf{k}$. Speciellt får vi att $\nabla f(3,2,1) = 7\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ så en ekvation för tangentplanet är;

$$7(x-3) - 8(y-2) + 9(z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7x - 8y + 9z = 14$$

Svar: $7x - 8y + 9z = 14$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Använd Lagrange multiplikatormetod för att bestämma det kortaste avståndet mellan origo och kurvan $y = x^2 - 1$ (5p)

Lösning: Avståndet från en punkt (x,y) till origo är $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Detta avstånd är som minst precis då kvadraten på avståndet (dvs. x^2+y^2) är som minst. För att göra kalkylerna lite enklare bestämmer vi därför minsta värdet på x^2+y^2 (målfunktionen) under förutsättning att $y = x^2 - 1$ (bivillkor). Lagrangfunktionen för detta optimeringsproblem är $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(y - x^2 + 1)$. Kandidater på punkter där minimum kan finnas får vi genom att bestämma de kritiska punkterna till $L(x,y,\lambda)$;

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + \lambda 2x = 0 \\ 2y - \lambda = 0 \\ x^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ \lambda = -2 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Avståndet från origo till $(0,-1)$ är 1 och avståndet från origo till $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$ är $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Det är också uppenbart att det verkligen finns ett minsta avstånd, så vi konstaterar att;

Svar: kortaste avståndet är $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2010-10-21	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

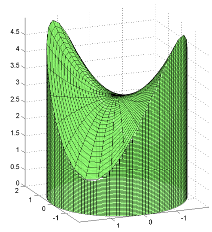
3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna dubbelintegralen $\iint_D e^{y/x}\,dxdy$ då D är området $0 < x < 1, 0 < y < x$ (3p)

Lösning: $$\iint_D e^{y/x}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{y/x}dy\right)dx = \int_0^1 \left[xe^{y/x}\right]_0^x dx =$$
$$= \int_0^1 (xe - x)\,dx = (e-1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

Svar: $\iint_D e^{y/x}\,dxdy = \dfrac{e-1}{2}$

(b) Beräkna volymen av kroppen $K : x^2 + y^2 \leq 4\ ,\ 0 \leq z \leq xy + 3$ (se figur) (3p)



Lösning:
$$\iint_{x+y^2\leq 4}(xy+3)dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 (r\cos\theta\cdot r\sin\theta + 3)rdr\right)d\theta =$$
$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} + 6\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = 12\pi$$

Alt. Man kan också p.g.a. symmetri konstatera att $\iint_{x^2+y^2\leq 4} xy\,dxdy = 0$ så;
$$\iint_{x^2+y^2\leq 4}(xy+3)dxdy = 3\iint_{x^2+y^2\leq 4} dxdy = 3\cdot 4\pi = 12\pi$$

Svar: Volymen av K är 12π (v.e.)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (6p)

(a) Visa att vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt genom att bestämma en potential ϕ till $\mathbf{F}$

Lösning: Vi söker en funktion $\phi(x, y, z)$ sådan att $\nabla\phi = \mathbf{F}$. Villkoret att $\phi_1 = 2xy$ ger att $\phi = x^2y + g(y, z)$ för någon funktion g. Deriverar vi detta uttryck m.a.p. y så får vi att $\phi_2 = x^2 + g_1(y, z)$. Villkoret $\phi_2 = x^2$ ger då att $g_1(y, z) = 0$ vilket betyder att $g(y, z) = h(z)$ för någon funktion h. Om det finns en potential ϕ så måste den alltså ha formen $\phi = x^2y + h(z)$. Deriverar vi nu detta uttryck m.a.p. z så får vi att $\phi_3 = h'(z)$. Vi ser att också det sista villkoret $\phi_3 = 1$ blir uppfyllt om $h'(z) = 1$ dvs. om $h(z) = z + C$. Vi konstaterar således att $\mathbf{F}$ är ett konservativt vektorfält med de (skalära) potentialerna $\phi(x, y, z) = x^2y + z + C$.

Svar: En potential är $\phi(x, y, z) = x^2y + z$

(b) Antag att en partikel rör sig längs med kurvan $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ från origo till punkten $(1, 1, 1)$. Beräkna det arbete $\int_\mathcal{C} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ som kraftfältet $\mathbf{F}$ uträttar på partikeln, dels genom att använda potentialen från deluppgift (a) och dels genom att utgå från definitionen av kurvintegral.

Lösning: $\int_\mathcal{C} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \phi(1, 1, 1) - \phi(0, 0, 0) = 2$
$$\int_\mathcal{C} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_0^1 (2t^3, t^2, 1)\bullet(1, 2t, 3t^2)\,dt = \int_0^1 (4t^3 + 3t^2)\,dt = \left[t^4 + t^3\right]_0^1 = 2$$

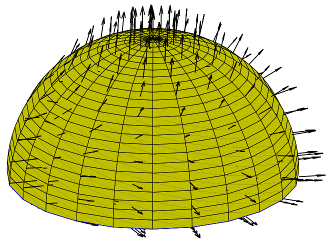
Svar: Arbetet är 2 (J)

5. Låt $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ (6p)

(a) Beräkna divergensen av $\mathbf{F}$

Lösning: $\textbf{div}\,\mathbf{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(z^2\right) = 2x + 2y + 2z$

Svar: Divergensen i en punkt (x,y,z) är $2x+2y+2z$



(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut ur området $\Omega : x^2+y^2+z^2 \leq 4\ ,\ z \geq 0$

Lösning: Gauss formel ger att;

$$\text{Flödet av } \mathbf{F} \text{ ut ur } \Omega = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_{\Omega} \textbf{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iiint_{\Omega} (2x+2y+2z)dxdydz$$

Byte till sfäriska koordinater ger sedan att;

$$\iiint_{\Omega} (2x+2y+2z)dxdydz =$$

$$2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^2 (\rho\sin\phi\cos\theta + \rho\sin\phi\sin\theta + \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\right)d\phi\right)d\theta =$$

$$2\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2\left(\underbrace{[\sin\theta-\cos\theta]_0^{2\pi}}_{=0}\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,d\phi + 2\pi\left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{\pi/2}\right) = 8\pi$$

Anm. Man kan bespara sig lite kalkyler ovan genom att observera att av symmetriskäl måste det vara så att $\iiint_\Omega 2x\,dxdydz = 0$ och $\iiint_\Omega 2y\,dxdydz = 0$ så $\iiint_\Omega \textbf{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iiint_\Omega 2z\,dxdydz$

Alternativ lösning: Låt $\mathcal{S}$ vara den sfäriska ytan som begränsar området uppåt dvs. $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2 = 4, z \geq 0$ och låt $\mathcal{S}_0$ vara cirkelskivan som begränsar området nedåt dvs. $\mathcal{S}_0 : x^2+y^2 \leq 4, z = 0$. Då gäller att;

$$\text{Flödet av } \mathbf{F} \text{ ut ur } \Omega = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS + \iint_{\mathcal{S}_0} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS$$

där $\hat{\mathbf{N}}$ är enhetsnormaler som pekar ut från området Ω. På $\mathcal{S}$ är $\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{2}(x,y,z)$ så

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{S}}\left(x^3+y^3+z^3\right)\,dS$$

Av symmetriskäl är $\iint_{\mathcal{S}}\left(x^3+y^3\right)\,dS = 0$ och integralen med z^3 kan vi beräkna genom att parametrisera $\mathcal{S}$. I de sfäriska koordinaterna ϕ,θ ges $\mathcal{S}$ av $x = 2\sin\phi\cos\theta, y = 2\sin\phi\sin\theta, z = 2\cos\phi$ och areaelementet är $dS = 4\sin\phi\,d\phi d\theta$, viket ger oss att;

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{S}}\left(x^3+y^3+z^3\right)\,dS = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{S}} z^3\,dS =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi} 8\cos^3\phi\,4\sin\phi\,d\theta\right)d\phi = 32\pi\left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/2} = 8\pi$$

På $\mathcal{S}_0$ är $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{k}$ och därmed $\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}} = -z^2$, men på $\mathcal{S}_0$ är ju också $z = 0$ så speciellt följer att $\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}} = 0$ där, vilket innebär att $\iint_{\mathcal{S}_0}\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS = 0$. Sammantaget är alltså flödet ut ur Ω lika med 8π

Svar: 8π (volymenheter per tidsenhet)