Lösningsförslag till tentamen MVE085 Flervariabelanalys V2

2011-01-12 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Helgesson , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Låt S vara den del av ytan $z = xy$ som ligger inuti eller på cylindern $x^2 + y^2 = 4$ dvs $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq 4\}$ och låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. Bestäm den punkt på ytan S för vilket flödet av $\mathbf{F}$ upp genom ytan (dvs flödets storlek i ytans normalrikting) är som störst. (6p)

Lösning: Enhetsnormalen i en punkt (x, y, z) på ytan ges av;

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{-y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + y^2 + x^2}}$$

och flödet upp genom punkten ges av;

$$\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} = \frac{-xy + 2x + 2z}{\sqrt{1 + y^2 + x^2}} \overset{\overset{z=xy}{\downarrow}}{=} \frac{xy + 2x}{\sqrt{1 + y^2 + x^2}}$$

Vi söker nu det största värdet på $f(x, y) = \frac{xy+2x}{\sqrt{1+y^2+x^2}}$ för x, y sådana att $x^2 + y^2 \leq 4$. Vi börjar med att undersöka ev. kritiska punkter till f i det inre av cirkelskivan;

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y + 2)\sqrt{1 + y^2 + x^2} - (xy + 2x)\frac{x}{\sqrt{1+y^2+x^2}} = 0 \\ x\sqrt{1 + y^2 + x^2} - (xy + 2x)\frac{y}{\sqrt{1+y^2+x^2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (y+2)(1+y^2+x^2)-(xy+2x)x=0 \\ x(1+y^2+x^2)-(xy+2x)y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+2)(1+y^2)=0 \\ x(1+x^2-2y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

Den kritiska punkten ligger på randen av cirkelskivan. För att undersöka funktionsvärdena utefter hela randen studerar vi funktionen;

$$g(t)=f(2\cos t, 2\sin t)=\frac{4}{\sqrt{5}}\cos t(\sin t+1)$$

Vi har;

$$g'(t)=\frac{4}{\sqrt{5}}\left(-\sin t(\sin t+1)+\cos^2 t\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin^2 t+\sin t-1=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin t=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}=\frac{-1\pm 3}{4}$$

Funktionsvärdena i de kritiska punkterna till g är 0 respektive $\frac{4}{\sqrt{5}}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{3}{2}=\pm 3\sqrt{\frac{3}{5}}$ och det största av dessa (dvs. $3\sqrt{\frac{3}{5}}$) antas i punkten $(\sqrt{3},1)$.

Svar: Störst flöde upp genom ytan sker i punkten $(\sqrt{3},1)$.

7. Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan som ges av parametriseringen $\mathbf{r}=2\cos t\,\mathbf{i}+2\sin t\,\mathbf{j}+2\sin 2t\,\mathbf{k}$, $0\le t\le 2\pi$ och låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z)=(e^x-y^3)\mathbf{i}+(e^y+x^3)\mathbf{j}+e^z\mathbf{k}$. Visa att kurvan $\mathcal{C}$ ligger i ytan $z=xy$ och använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$.

Lösning: Om $x=2\cos t, y=2\sin t$ och $z=2\sin 2t$ så är;

$$xy=2\cos t 2\sin t=2\sin 2t=z$$

vilket visar att $\mathcal{C}$ ligger i ytan $z=xy$. Notera att kurvan även ligger på cylindern $x^2+y^2=4$ så $\mathcal{C}$ är randen/kanten av ytan S i uppgift 6 ovan. Eftersom kurvan $\mathcal{C}$ är orienterad moturs sett ovanifrån ytan $z=xy$ så skall ytan i Stokes sats vara orienterad med en enhetsnormal som pekar upp dvs.

$$\hat{\mathbf{N}}=\frac{-y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

Areaelementet på ytan är $dS=\sqrt{1+y^2+x^2}\,dxdy$ och

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x-y^3 & e^y+x^3 & e^z \end{vmatrix}=3(x^2+y^2)\mathbf{k}$$

så Stokes sats ger att;

$$\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\iint_S \mathbf{curl}\,\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS=\iint_{x^2+y^2\le 4}3(x^2+y^2)\,dxdy=$$

$$3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 r^2\,r\,dr\right)d\theta=6\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^2=24\pi$$

Svar: $\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=24\pi$

8. (a) Definiera begreppen *partiell derivata* och *riktningsderivata* och förklara varför partiell derivata kan betraktas som specialfall av riktningsderivata. (2p)

(b) Förklara varför $\mathbf{N}=f_1(a,b)\mathbf{i}+f_2(a,b)\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ger en normalvektor till en funktionsyta $z=f(x,y)$ i punkten $(a,b,f(a,b))$ och använd denna observation för att härleda tangentplanets ekvation. (4p)

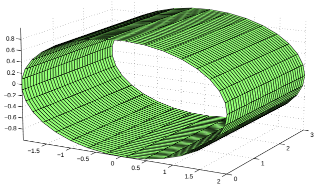
Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2011-01-12	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Skissa ytan $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4z^2 = 4, 0 \le y \le 3\}$ (3p)

Skiss:



(b) Låt z vara en funktion av två variabler sådan att $z(x, y) = f(x^3 e^y)$, för någon differentierbar funktion f. Visa då att z uppfyller den partiella differentialekvationen $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 3\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ (3p)

Lösning: Om $z(x, y) = f(x^3e^y)$ så är $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(x^3e^y)3x^2e^y$ och $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(x^3e^y)x^3e^y$ vilket insatt i differentialekvationens vänsterled ger att;

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(f'(x^3e^y)3x^2e^y\right) - 3\left(f'(x^3e^y)x^3e^y\right) = f'(x^3e^y)x^2e^y(3x - 3x) = 0$$

(c) Ange Jacobimatrisen $D\mathbf{f}(x, y, z)$ till den funktion från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2$ som ges av $\mathbf{f}(x, y, z) = (xz\,,\, x\sin(yz))$. Beräkna speciellt $D\mathbf{f}(2, 0, 1)$ och använd bl.a. denna matris för att bestämma ett approximativt värde på $\mathbf{f}(2.1\,,\, 0.2\,,\, 0.9)$. (3p)

Lösning: Vi har $D\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 & x \\ \sin(yz) & xz\cos(yz) & xy\cos(yz) \end{bmatrix}$,

och speciellt är $D\mathbf{f}(2, 0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, vilket ger oss att

$$\mathbf{f}(2.1\,,\, 0.2\,,\, 0.9) \approx \mathbf{f}(2, 0, 1) + \underbrace{D\mathbf{f}(2, 0, 1)d\mathbf{x}}_{d\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Svar: $D\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{bmatrix} z & 0 & x \\ \sin(yz) & xz\cos(yz) & xy\cos(yz) \end{bmatrix}$, $D\mathbf{f}(2, 0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{f}(2.1\,,\, 0.2\,,\, 0.9) \approx (1.9, 0.4)$

2. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x, y) = xy - x - 2y$ på området $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\, 0 \le y \le 5 - x^2\}$ (5p)

Lösning: Eftersom funktionen f saknar singulariteter så måste extremvärdena antas antingen i kritiska punkter i det inre av Ω eller i punkter på randen av Ω. Vi börjar med att bestämma ev. kritiska punkter till f. Vi har;

$$\nabla f(x, y) = (y - 1)\mathbf{i} + (x - 2)\mathbf{j} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (2, 1)$$

Den kritiska punkten $(2, 1)$ ligger på randen av området så det finns inga kritiska punkter i det inre av Ω. Vi undersöker sedan de två randbitarna;

$$R_1 : y = 0, -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5} \qquad \text{och} \qquad R_2 : y = 5 - x^2, -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}.$$

R_1 : $g_1(x) = f(x, 0) = -x$ antar sitt största och minsta värde i ändpunkterna på intervallet $-\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$. Funktionsvärdena i dessa ändpunkter är $g_1(-\sqrt{5}) = \sqrt{5}$ resp. $g_1(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$

R_2 : $g_2(x) = f(x, 5 - x^2) = x(5 - x^2) - x - 2(5 - x^2) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 10$. Vi har $g_2'(x) = -3x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}} = \frac{2\pm4}{3} \Leftrightarrow x = 2$ eller $x = -\frac{2}{3}$. Båda dessa kritiska punkter till g_2 ligger i intervallet $-\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$ och funktionsvärdena i dessa punkter är $g_2(2) = -2$ resp $g_2(-\frac{2}{3}) = \frac{8}{27} + \frac{8}{9} - \frac{8}{3} - 10 = -\frac{8+24-72-270}{27} = -\frac{310}{27}$ $(< -\sqrt{5})$

Svar: Funktionens största och minsta värde på Ω är $\sqrt{5}$ resp $-\frac{310}{27}$

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2011-01-12	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

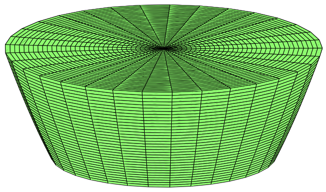
(a) Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} x^2\, ds$ då $\mathcal{C}$ är det räta linjestycket (dvs sträckan) mellan punkterna $(0,1,1)$ och $(1,1,0)$ i $\mathbb{R}^3$. (3p)

Lösning: En riktningsvektor för linjen genom de givna punkterna är $(1,0,-1)$ så sträckan mellan punkterna parametriseras av $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + (1-t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$. Vi har $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ och därmed $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$ så

$$\int_{\mathcal{C}} x^2\, ds = \int_0^1 t^2\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Svar: $\int_{\mathcal{C}} x^2\, ds = \frac{\sqrt{2}}{3}$

(b) Beräkna volymen av den kropp (se figur) som begränsas av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ samt planen $z = 1$ och $z = 2$. (3p)



Lösning: Volymen av den kropp K som beskrivs i uppgiften ges av;

$$\iiint_K dV = \int_1^2 \left(\iint_{0\le x^2+y^2\le z} dxdy\right) dz =$$

$$\int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{z}} \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) r\, dr\right) dz = 2\pi \int_1^2 \left(\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{\sqrt{z}}\right) dz = \pi\int_1^2 z\, dz = \pi\left[\frac{1}{2}z^2\right]_1^2 = \frac{3\pi}{2}$$

Svar: $\frac{3\pi}{2}$ (volymenheter)

4. Låt $\mathcal{C}$ vara den positivt orienterade randen av triangelområdet D med hörn i $(0,0), (2,0)$ och $(1,1)$ och låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet som ges av $\mathbf{F}(x,y) = (\sin x + 3y^2)\mathbf{i} + (2x - e^{y^2})\mathbf{j}$ (6p)

(a) Är vektorfältet $\mathbf{F}$ konservativt på området D? (motivera tydligt ditt svar)

Lösning: Ett nödvändigt villkor för att ett vektorfält $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ skall vara konservativt på ett område är att; $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ i hela området. Detta är inte uppfyllt för vektorfältet i denna uppgift ty;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin x + 3y^2\right) = 6y \not\equiv 2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x - e^{y^2}\right)$$

så vektorfältet är ej konservativt på D.

Svar: Vektorfältet är ej konservativt på D.

(b) Beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ med hjälp av Greens formel.

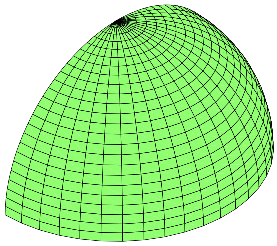
Lösning: Greens formel ger att

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (2-6y)\, dx\right) dy =$$

$$\int_0^1 (2-6y)(2-2y)dy = \int_0^1 (4 - 16y + 12y^2)dy = \left[4y - 8y^2 + 4y^3\right]_0^1 = 0$$

Svar: $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = 0$

5. Låt S vara den del av sfären $x^2+y^2+z^2=3$ där $x \geq 0\,,\ z \geq 0$ (6p)



(a) Beskriv ytan S i sfäriska koordinater.

Svar: I sfärsiska koordinater ρ, ϕ, θ sådana att $\begin{cases} x = \rho \sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$

så beskrivas S av att; $\rho = \sqrt{3}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(b) Beräkna ytintegralen $\iint_S z\, dS$

Lösning: Areaelementet på en sfär med radie a är $dS = a^2 \sin\phi\, d\phi d\theta$ så om D är området $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ i $\phi\theta - planet$ så får vi att;

$$\iint_S z\, dS = \iint_D \underbrace{\sqrt{3}\cos\phi}_{z}\underbrace{3\sin\phi\, d\phi d\theta}_{dS} = 3\sqrt{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\cos\phi\sin\phi\, d\phi\right) d\theta =$$

$$3\sqrt{3}\pi\left[\frac{1}{2}\sin^2\phi\right]_0^{\pi/2} = \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$$