Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2011-08-27 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Magnus Önnheim , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Visa att ekvationen $zx^2 + y\sin z = 1$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(1, 0, 1)$. Bestäm också tangentplanet till $z = f(x, y)$ i $(1, 0, 1)$. (6p)

7. Bestäm fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F} = \nabla\phi$, där $\phi(x, y) = x^2y$. Skissa också på några fältlinjer tillsammans med några pilar som illustrerar vektorfältet $\mathbf{F}$, samt några nivåkurvor till ϕ. Av figuren skall det tydligt framgå vilka samband som gäller mellan fältlinjerna, vektorfältspilarna och nivåkurvorna. (6p)

8. (a) Definiera begreppen *partiell derivata* och *riktningsderivata* och förklara varför partiell derivata kan betraktas som specialfall av riktningsderivata. (2p)

(b) Förklara varför $\mathbf{N} = f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ger en normalvektor till en funktionsyta $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$ och använd denna observation för att härleda tangentplanets ekvation. (4p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 10/11

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	**MVE085 Flervariabelanalys V2 2011-08-27**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt z vara en funktion av två variabler sådan att $z(x, y) = f(xy^2)$, för någon differentierbar funktion f. Visa då att z uppfyller den partiella differentialekvationen $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. (3p)

Lösning:

(b) Ange på formen $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ en parametrisering av sträckan mellan punkterna $(-1, 1, 0)$ och $(2, -3, 2)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Visa att $P = (1, \frac{3}{2})$ är en kritisk punkt till funktionen $f(x, y) = 2y^4 - 2x^2y + 2x^3 - 25y$ och avgör om funktionen f antar ett lokalt max eller min i P, eller om P är en sadelpunkt. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Använd Lagrange multiplikatormetod för att bestämma det kortaste avståndet mellan punkten $(0, 2)$ och kurvan $y = x^2$. (5p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2011-08-27	sid.nummer	Poäng

Godkändtdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt S vara den del av cylindern $x^2 + y^2 = 2$ där $y \geq 0$ och $-1 \leq z \leq 1$. Bestäm en parametrisering av S. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna medelvärdet av funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ över triangeln $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Beräkna flödet av $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + (z^2 + y)\mathbf{k}$ ut ur området $D : x^2 + y^2 \leq z^2 \;,\; 0 \leq z \leq 1$ (6p)

5. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ där $\mathcal{C}$ är skärningen mellan den elliptiska cylindern $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ och planet $z = x$, och där

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$ (3p)

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + (2x - z)\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$ (3p)