Lösningsförslag till tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2011-08-27 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Magnus Önnheim , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Visa att ekvationen $zx^2 + y\sin z = 1$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(1, 0, 1)$. Bestäm också tangentplanet till $z = f(x, y)$ i $(1, 0, 1)$. (6p)

Lösning/Bevis: För att visa att ekvationen lokalt definierar en funktion $z = f(x, y)$ kan man t.ex. hänvisa till Implicita funktionssatsen och för att bestämma de partiella derivatorna av f i punkten $(1, 0)$ (vilket direkt ger oss ekvationen för tangentplanet) kan man derivera ekvationen implicit, så som finns beskrivet i avsnitt 12.8. Se t.ex. lösningarna till tentamensuppgift 5 på tentan den 28 augusti 2009. Låt oss här istället ge följande alternativa lösning/argumentation:

Ekvationen $zx^2 + y\sin z = 1$ beskriver en nivåyta till $F(x, y, z) = zx^2 + y\sin z$. Gradienten till F i $(1, 0, 1)$ ger en normalvektor till nivåytan i $(1, 0, 1)$. Vi har $\nabla F(x, y, z) = 2xz\mathbf{i} + \sin z\mathbf{j} + (x^2 + y\cos z)\mathbf{k}$ och därmed $\nabla F(1, 0, 1) = 2\mathbf{i} + \sin 1\mathbf{j} + \mathbf{k}$, så $\mathbf{N} = (2, \sin 1, 1)$ är en normalvektor till nivåytan i $(1, 0, 1)$. Eftersom denna normalvektor inte är vinkelrät mot z-axeln (vilket motsvarar villkoret $F_3(1, 0, 1) \neq 0$ i Implicita funktionssatsen) så kan vi lokalt kring $(1, 0, 1)$ betrakta nivåytan som en funktionsyta $z = f(x, y)$, för någon funktion f. Eftersom $\mathbf{N}$ också är en normalvektor till tangentplanet i $(1, 0, 1)$ så ges tangentplanets ekvation av

$$\mathbf{N}\bullet(x-1, y-0, z-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2(x-1) + \sin 1 \cdot y + z - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 3 - 2x - \sin 1 \cdot y$$

Svar: $z = 3 - 2x - \sin 1 \cdot y$

7. Bestäm fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F} = \nabla\phi$, där $\phi(x, y) = x^2y$. Skissa också på några fältlinjer tillsammans med några pilar som illustrerar vektorfältet $\mathbf{F}$, samt några nivåkurvor till ϕ. Av figuren skall det tydligt framgå vilka samband som gäller mellan fältlinjerna, vektorfältspilarna och nivåkurvorna. (6p)

Lösning: Fältlinjerna uppfyller differentialekvationen

$$\frac{dx}{\phi_1(x,y)} = \frac{dy}{\phi_2(x,y)} \Leftrightarrow \frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{x^2} \Leftrightarrow xdx = 2ydy$$

Integration av båda led ger $\frac{1}{2}x^2 = y^2 + C$. Fältlinjerna ges alltså av hyperbler av typen $\frac{1}{2}x^2 - y^2 = C$. Vidare har vi att $\phi(x,y) = C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{C}{x^2}$ så nivåkurvorna till ϕ ges av funktionskurvor av typen $y = \frac{C}{x^2}$. Det bör framgå av en skiss att fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F}$ skär vinkelrätt genom nivåkurvorna till potentialen ϕ. Vidare bör det framgå av skissen att vektorfältspilarna tangerar fältlinjerna.

Svar: Fältlinjerna till $\mathbf{F}$ ges av $\frac{1}{2}x^2 - y^2 = C$.

8. (a) Definiera begreppen *partiell derivata* och *riktningsderivata* och förklara varför partiell derivata kan betraktas som specialfall av riktningsderivata. (2p)

(b) Förklara varför $\mathbf{N} = f_1(a,b)\mathbf{i} + f_2(a,b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ger en normalvektor till en funktionsyta $z = f(x,y)$ i punkten $(a, b, f(a,b))$ och använd denna observation för att härleda tangentplanets ekvation. (4p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Anonym kod	**MVE085 Flervariabelanalys V2 2011-08-27**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt z vara en funktion av två variabler sådan att $z(x, y) = f(xy^2)$, för någon differentierbar funktion f. Visa då att z uppfyller den partiella differentialekvationen $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. (3p)

Lösning: Om $z(x, y) = f(xy^2)$ så är $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(xy^2)y^2$ och $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(xy^2)2xy$ vilket insatt i differentialekvationens vänsterled ger att;

$$2x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xf'(xy^2)y^2 - yf'(xy^2)2xy = f'(x^3e^y)(2xy^2 - 2xy^2) = 0$$

(b) Ange på formen $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ en parametrisering av sträckan mellan punkterna $(-1, 1, 0)$ och $(2, -3, 2)$. (3p)

Lösning: Punkterna på sträckan beskrivs av $t(-1, 1, 0) + (1 - t)(2, -3, 2)$ dvs $(2 - 3t, 4t - 3, 2 - 2t)$, för $0 \leq t \leq 1$.

Svar: En parametrisering ges av $\mathbf{r}(t) = (2 - 3t)\mathbf{i} + (4t - 3)\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$

(c) Visa att $P = (1, \dfrac{3}{2})$ är en kritisk punkt till funktionen $f(x, y) = 2y^4 - 2x^2y + 2x^3 - 25y$ och avgör om funktionen f antar ett lokalt max eller min i P, eller om P är en sadelpunkt. (3p)

Lösning: Vi har $f_1(x, y) = -4xy + 6x^2$ och $f_2(x, y) = 8y^3 - 2x^2 - 25$ och speciellt är $f_1(1, \frac{3}{2}) = -4 \cdot \frac{3}{2} + 6 = 0$ och $f_2(1, \frac{3}{2}) = 8 \cdot (\frac{3}{2})^3 - 2 - 25 = 0$, vilket visar att $P = (1, \frac{3}{2})$ är en kritisk punkt till f.
För att bestämma punktens karaktär studerar vi Hessianen av f i punkten. Vi får att;

$$\mathscr{H}(x, y) = \begin{bmatrix} -4y + 12x & -4x \\ -4x & 24y^2 \end{bmatrix} \text{ och speciellt är } \mathscr{H}(1, \frac{3}{2}) = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 54 \end{bmatrix}$$

Matrisen $\mathscr{H}(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ är positivt definit ty $det(\mathscr{H}(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})) > 0$ och $f_{11}(1, \frac{3}{2}) > 0$ så $P = (1, \frac{3}{2})$ är en minpunkt.

Svar: f antar ett minimum i P.

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Använd Lagrange multiplikatormetod för att bestämma det kortaste avståndet mellan punkten $(0, 2)$ och kurvan $y = x^2$. (5p)

Lösning: Avståndet från en godtycklig punkt (x, y) (på kurvan) till punkten $(0, 2)$ ges av $d(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$. Detta avstånd är som minst precis då kvadraten på avståndet (dvs. $x^2 + (y - 2)^2$) är som minst. För att göra kalkylerna lite enklare bestämmer vi därför minsta värdet på $x^2 + (y - 2)^2$ (målfunktionen) under förutsättning att $y = x^2$ (bivillkor). Lagrangfunktionen för detta optimeringsproblem är $L(x, y, \lambda) = x^2 + (y - 2)^2 + \lambda(y - x^2)$. Kandidater på punkter där minimum kan finnas får vi genom att bestämma de kritiska punkterna till $L(x, y, \lambda)$;

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - \lambda 2x = 0 \\ 2(y - 2) + \lambda = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda = 4 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \\ y = \frac{3}{2} \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Avståndet mellan $(0, 2)$ och $(0, 0)$ är 2 och avståndet mellan $(0, 2)$ och $(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2})$ är $\frac{\sqrt{7}}{2}$.
Det är också uppenbart att det verkligen finns ett minsta avstånd, så vi konstaterar att;

Svar: kortaste avståndet är $\frac{\sqrt{7}}{2}$

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2011-08-27	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt S vara den del av cylindern $x^2 + y^2 = 2$ där $y \geq 0$ och $-1 \leq z \leq 1$. Bestäm en parametrisering av S. (3p)

Lösning: Cylinderbiten beskrivs naturligt i de cylindriska koordinaterna (r, θ, z) vars samband till de Cartesiska koordinaterna (x, y, z) ges av

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

S är den del av cylindern där $r = \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq \pi$ och $-1 \leq z \leq 1$.

Svar: Ytbiten S parametriseras av $\mathbf{r} = \sqrt{2}\cos\theta\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin\theta\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, där $0 \leq \theta \leq \pi$ och $-1 \leq z \leq 1$.

(b) Beräkna medelvärdet av funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ över triangeln $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x$. (3p)

Lösning: Medelvärdet ges av $\bar{f} = \dfrac{1}{\text{arean av } T}\displaystyle\int_T f(x, y)\,dxdy$, där T betecknar triangeln. Arean av triangeln är 2 och

$$\int_T f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} (x^2+y^2)\,dy\right) dx = \int_0^2 \left[x^2y + \frac{1}{3}y^3\right]_0^{2-x} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x^2(2-x) + \frac{1}{3}(2-x)^3\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}(2-x)^4\right]_0^2 = \frac{16}{3} - 4 + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Svar: Medelvärdet är $\bar{f} = \frac{4}{3}$

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Beräkna flödet av $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + (z^2 + y)\mathbf{k}$ ut ur området $D : x^2 + y^2 \leq z^2 \ , \ 0 \leq z \leq 1$ (6p)

Lösning: Gauss formel ger att;

$$\text{Flödet av } \mathbf{F} \text{ ut ur } D = \iint_{\partial D} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_D \mathbf{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iiint_D (1+2+2z)dxdydz =$$

$$= \int_0^1 \left(\iint_{x^2+y^2\leq z^2} (3+2z)dxdy\right) dz = \int_0^1 (3+2z)\pi z^2\,dz = \pi\left[z^3 + \frac{1}{2}z^4\right]_0^1 = \pi(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}\pi$$

Svar: Flödet är $\dfrac{3}{2}\pi$

5. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ där $\mathcal{C}$ är skärningen mellan den elliptiska cylindern $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ och planet $z = x$, och där

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$ (3p)

Lösning: Vektorfältet är konservativt ty;

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix} = (6xyz^2 - 6xyz^2)\mathbf{i} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

och kurvan $\mathcal{C}$ är sluten så kurvintegralen blir 0.

Svar: $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = 0$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + (2x - z)\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$ (3p)

Lösning: Vektorfältet är inte konservativt ty t.ex. är $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 2 \neq 1 = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$, så kurvintegralen beror på den väg vi integrerar över. För att beräkna integralen kan vi parametrisera kurvan med $\mathbf{r}(\theta) = 6\cos\theta\mathbf{i} + 2\sin\theta\mathbf{j} + 6\cos\theta\mathbf{k}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, vilket ger oss;

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^{2\pi} \left(-12\sin^2\theta + 12\cos^2\theta + 24\sin^2\theta\right) d\theta = \int_0^{2\pi} 12\, d\theta = 24\pi$$

Svar: $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 24\pi$