Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2012-01-11 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Fredrik Lindgren , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x, y, z) = 2x + z$ på skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 8$ och planet $x + y + z = 1$. (6p)

7. Två parallella plan skär en sfär. Visa att arean av den del av sfären som ligger mellan planen endast beror på sfärens radie och avståndet mellan planen. (6p)

8. Formulera följande satser (beteckningar skall förklaras och förutsättningar/villkor skall anges);

(a) Greens sats (2p)

(b) Gauss sats (divergenssatsen) (2p)

(c) Stokes sats (2p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 10/11

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2012-01-11	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Ge en intuitiv beskrivning av begreppet *gränsvärde* för funktioner av två variabler. (2p)

Beskrivning:

....

(b) Bestäm ekvationer för tangentplanet och normallinjen till funktionsytan $z = x^2y - 2y + 5$ i punkten $(1, 3, 2)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Antag att en partikels position i xy-planet vid en tidpunkt t ges av $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + t\mathbf{j}$. Skissa partikelns rörelsebana för $-1 \leq t \leq 1$ och ange partikelns fart vid varje tidpunkt t under detta tidsintervall. När har partikeln lägst fart? (3p)

Lösning & Skiss:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = 6xy - 2x^3 - 3y^2$ och låt Ω vara det kvadratiska området $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.

(a) Bestäm alla kritiska punkter till $f(x, y)$. (2p)

(b) Bestäm det största värde som $f(x, y)$ antar på randen av området Ω. (3p)

(c) Bestäm det största värdet som $f(x, y)$ antar på området Ω. (1p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2012-01-11	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt D vara triangelområdet med hörn i $(0,0),(0,1)$ och $(1,1)$. Avgör om den generaliserade integralen $\iint_D \frac{\sqrt{x}}{y^2}\,dxdy$ är konvergent eller divergent. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna massan av den kropp K som begränsas av xy-planet och paraboloiden $z=2-x^2-y^2$, och som består av ett material med densiteten $\delta(x,y,z)=z$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Låt C vara cirkelbågen $x^2+y^2=4, x\geq 0, y\geq 0$ orienterad moturs (dvs. från $(2,0)$ till $(0,2)$).

(a) Beräkna kurvintegralen $\int_C f(x,y)\,ds$, där $f(x,y)=2x+y$. (3p)

(b) Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}=2x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ (3p)

5. (a) Vilken typ av andragradsyta beskrivs av parametriseringen

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=r \end{cases} \quad , \ r\geq 0\ , \ 0\leq\theta<2\pi$$ (1p)

(b) Avgör om hastighetsfältet $\mathbf{F}=2xz\mathbf{i}+2yz\mathbf{j}+(x^2+y^2)\mathbf{k}$ är virvelfritt och/eller källfritt i $\mathbb{R}^3$ (2p)

(c) Beräkna flödet av hastighetsfältet i deluppgift (b) nedåt (dvs. i negativ z-led) genom den del $\mathcal{S}$ av ytan i deluppgift (a) där $0\leq r\leq 1$ (3p)