Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2011-10-20 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Richard Lärkäng , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Beräkna flödet av $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ ut ur den kropp som begränsas av paraboloiden $2z = x^2 + y^2$ och planet $z = 1 + x + y$. (6p)

7. Låt $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$. Visa att $\lim_{x\to 0} f(x,kx)$ existerar och är lika för alla reella tal k men att $f(x,y)$ trots det saknar gränsvärde i origo. (6p)

8. Låt $g(x,y) = 0$ beskriva en glatt kurva och $f(x,y)$ en glatt funktion. Antag vidare att (x_0,y_0) är en extrempunkt till $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$. Visa då att det finns ett λ_0 sådant att (x_0,y_0,λ_0) är en kritisk punkt till Lagrangefunktionen

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

(6p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 10/11

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \;,\; 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \;,\; a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \;,\; a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2011-10-20	sid.nummer	Poäng

Godkändtdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm och skissa definitionsmängden till funktionen $f(x, y) = \ln(3 - xy)$ och visa att origo är en kritisk punkt till $f(x, y)$. (3p)

Lösning & skiss:

Svar: ....

(b) Bestäm taylorpolynomet av grad 2 till $f(x, y) = e^{x-2y}$ i punkten $(2, 1)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm längden av kurvan $\mathbf{r} = \frac{1}{3}t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ mellan punkterna $(0, 0, 0)$ och $(9, 9, 6)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Använd Lagrange multiplikatormetod för att bestämma det största värde som funktionen $f(x, y) = x^2y$ antar på cirkeln med centrum i origo och radie 3. (5p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2011-10-20	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna dubbelintegralen $\iint_D y\,dxdy$ då D är det område i xy-planet som begränsas av parabeln $y = x^2$ och linjen $y = 1$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna massan av den kropp K som ges av $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$ och som består av ett material med densiteten $\delta(x, y, z) = z$ (Tips: sfärisk substitution) (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ och låt $\mathcal{C}$ vara randkurvan till rektangeln med hörn i $(0,0), (2,0), (2,1), (0,1)$ orienterad moturs. Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ genom att (6p)

(a) parametrisera randbitarna och utgå från definitionen av kurvintegral.

(b) använda Greens sats.

5. Betrakta $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ och låt S vara den del av funktionsytan $z = xy$ som ligger inuti cylindern $x^2 + y^2 \leq 4$ (6p)

(a) Bestäm en parametrisering av S

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom ytan S.