Lösningsförslag till deltentamen godkäntdelen, del 1

MVE085 Flervariabelanalys V2

2013-09-21 kl. 8:30-11:30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Matteo Molteni, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

Tentamen på kursen består av tre delar; del 1 och del 2 av godkäntdelen samt överbetygsdelen. Denna deltenta täcker endast den första av dessa tre delar. För godkänt på tentamen som helhet krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas i samband med undervisningen senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Godkäntdelen, del 1

se uppgift 1:abc och 2 på nästa blad

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 13/14

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	**MVE085 Flervariabelanalys V2 2013-09-21**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående deluppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen $f(x,y) = x \ln y$ i punkten $(3,1)$. (2p)

Lösning: Vi har
$$f_1(x,y) = \ln y \ , \ f_2(x,y) = \frac{x}{y}$$
$$f_{11}(x,y) = 0 \ , \ f_{12}(x,y) = \frac{1}{y} \ , \ f_{22}(x,y) = \frac{-x}{y^2}$$
och speciellt är
$$f(3,1) = 0 \ , \ f_1(3,1) = 0 \ , \ f_2(3,1) = 3$$
$$f_{11}(3,1) = 0 \ , \ f_{12}(3,1) = 1 \ , \ f_{22}(3,1) = -3$$
så

Svar: $P_2(x,y) = 3(y-1) + (x-3)(y-1) - \frac{3}{2}(y-1)^2$

(b) Uttryck $\frac{d^2}{ds^2} f(s^2, 2s+1)$ i de partiella derivatorna av f. (3p)

Lösning:
$$\frac{d^2}{ds^2} f(s^2,2s+1) = \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds} f(s^2,2s+1)\right) = \frac{d}{ds}\big(f_1(s^2,2s+1)2s + f_2(s^2,2s+1)2\big) =$$
$$= \big(f_{11}(s^2,2s+1)2s + f_{12}(s^2,2s+1)2\big)\,2s + f_1(s^2,2s+1)2 + \big(f_{21}(s^2,2s+1)2s + f_{22}(s^2,2s+1)2\big)\,2$$

Svar: $\frac{d^2}{ds^2} f(s^2,2s+1) = 4s^2 f_{11}(s^2,2s+1) + 8s f_{12}(s^2,2s+1) + 4f_{22}(s^2,2s+1) + 2f_1(s^2,2s+1)$

(c) Antag att en partikels position i xy-planet vid en tidpunkt t ges av $\mathbf{r} = (1-t^2)\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$. Skissa partikelns rörelsebana och ange dess fart i punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. (3p)

Lösning: Eftersom $x = 1 - t^2$ och $y = t^2$ är $y = 1 - x$, så partikeln rör sig längs den raka sträckan mellan $(1,0)$ och $(0,1)$. Partikelns hastighet ges vidare av $\mathbf{r}'(t) = -2t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ och speciellt i punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ där $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ är hastigheten $\mathbf{r}'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$ och därmed farten $|\mathbf{r}'(\frac{1}{\sqrt{2}})| = \sqrt{2+2} = 2$

Svar: Partikeln har farten 2 i punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y$ och låt Ω vara triangelområdet $x \ge 0, y \ge 0, 2x + y \le 5$.

(a) Visa att funktionen $f(x,y)$ endast har en kritisk punkt och att det är en sadelpunkt. (2p)

Lösning: Vi har $\nabla f(x,y) = (2x-2)\mathbf{i} + (4-2y)\mathbf{j} = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ (x,y) = (1,2)$ och eftersom Hessianen $\mathcal{H}(1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ är indefinit så är $(1,2)$ en sadelpunkt.

(b) Förklara varför det följer av deluppgift (a) att funktionens största värde på Ω antas på randen av området. (1p)

Lösning: Eftersom funktionen inte har några singulära punkter eller lokala maximipunkter i det inre av Ω så måste det största värdet antas på randen av Ω.

(c) Bestäm det största värde som $f(x, y)$ antar på randen av området Ω. (3p)

Lösning: Vi undersöker de tre randbitarna;

$$\begin{aligned} &R_1 : y = 0,\ 0 \leq x \leq 5/2 \quad , \\ &R_2 : x = 0,\ 0 \leq y \leq 5 \quad , \\ &R_3 : y = 5 - 2x,\ 0 \leq x \leq 5/2. \end{aligned}$$

På R_1 studerar vi $g_1(x) = f(x, 0) = x^2 - 2x$. Eftersom $g_1'(x) = 2x - 2$ så är $x = 1$ den enda kritiska punkten till g_1. Denna punkt ligger i intervallet $0 \leq x \leq 5/2$ och vi har $g_1(1) = -1$.

På R_2 studerar vi $g_2(y) = f(0, y) = 4y - y^2$. Eftersom $g_2'(y) = 4 - 2y$ så är $y = 2$ den enda kritiska punkten till g_2. Denna punkt ligger i intervallet $0 \leq y \leq 5$ och vi har $g_2(2) = 4$.

På R_3 studerar vi $g_3(x) = f(x, 5 - 2x) = ... = -3x^2 + 10x - 5$. Eftersom $g_3'(x) = -6x + 10$ så är $x = 5/3$ den enda kritiska punkten till g_3. Denna punkt ligger i intervallet $0 \leq x \leq 5/2$ och vi har $g_1(5/3) = 10/3$.

Avslutningsvis måste vi också kontrollera funktionsvärdena i ”hörnpunkterna” av området dvs. $(0, 0), (5/2, 0)$ och $(0, 5)$. Vi har $f(0, 0) = 0, f(5/2, 0) = 5/4$ och $f(0, 5) = -5$. Dessa värden skall slutligen jämföras med ovan erhållna ”kandidater” dvs $f(1, 0) = -1, f(0, 2) = 4$ och $f(5/3, 5/3) = 10/3$. Av alla dessa värden är 4 störst.

Svar: Funktionens största värde på randen av Ω är 4.