Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2014-08-30 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Åse Fahlander, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive eventuella bonuspoäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Visa att ekvationen $x + y - 2z + e^{3z} = 1$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(0, 0, 0)$. Bestäm sedan Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen $f(x, y)$ i punkten $(0, 0)$. (6p)

7. (a) För ett vektorfält $\mathbf{F}$, visa att div (curl $\mathbf{F}$) $= 0$ så länge alla partiella derivator existerar. (2p)

(b) Med hjälp av Stokes sats, beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ och $\mathcal{C}$ är skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2 = 4$ och planet $x+z = 3$, orienterad moturs sett uppifrån längs z-axeln. (4p)

8. (a) För en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och en punkt (a, b), förklara vad som menas med

(i) att f är *differentierbar* i (a, b), (1p)

(ii) gradienten $\nabla f(a, b)$, (1p)

(iii) nivåkurvan till f genom punkten (a, b). (1p)

(b) Bevisa att om f är differentierbar i (a, b) och $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$, då är $\nabla f(a, b)$ normal till nivåkurvan till f genom (a, b). (3p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 13/14

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2014-08-30	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm $\dfrac{\partial}{\partial u} f(x, y)$, då $f(x, y) = e^{xy}$, $x = 3u \sin v$ och $y = 4uv^2$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Låt $f(x, y) = 2x + e^{x^2-y}$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(0, 0, 1)$. Bestäm även ett approximativt värde för $f(0.02, 0.03)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm längden av kurvan med parametriseringen $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq e.$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm alla kritiska punkter hos funktionen $f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y$, och avgör om funktionen har ett lokalt max, lokalt min eller ingetdera, i de kritiska punkterna. (6p)

Anonym kod	**MVE085 Flervariabelanalys V2 2014-08-30**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm $\iint_T (4e^{x^2} - 5\sin y)\, dA$, där T är det område i $\mathbb{R}^2$ som begränsas av linjerna $y = x$, $y = 0$ och $x = 4$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = (2xy - 3)\mathbf{i} + (x^2 + \cos y)\mathbf{j}$. Visa att $\mathbf{F}$ är konservativt, bestäm en potential för $\mathbf{F}$ och beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbf{F}$ uträttar på en partikel som förflyttar sig rätlinjigt från $(0, 0)$ till $(2, 1)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Låt K beteckna området i $\mathbb{R}^3$ som inneslutas av paraboloiden $z = 1 + x^2 + y^2$ och planet $z = 5$, och låt ∂K beteckna dess yta, inklusive toppen.

(a) Beräkna volymen av K. (2p)

(b) Beräkna arean av ∂K. (2p)

(c) Med hjälp av Gauss divergens sats, bestäm flödet ut ur K av vektorfältet (4p)

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{3}x^3 + \cos(yz)\right)\mathbf{i} + (xy + z^2)\mathbf{j} + (y^2 z + e^{xy})\mathbf{k}.$$

(Tips för (c): Använd symmetri för att få bort en term ur integralen).

5. Låt $\mathcal{R}$ vara det område i första kvadranten av $\mathbb{R}^2$ som begränsas av koordinataxlarna samt cirklarna med radier 1 och 3 kring origo. Med hjälp av Greens sats, bestäm

$$\oint_{\partial\mathcal{R}} (e^x + 6xy)\,dx + (8x^2 + \sin y^2)\,dy,$$

där kurvintegralen tas moturs längs randen till $\mathcal{R}$. (4p)