

Datorövning 1 - Kurvor och ytor

avsnitt 1.1, 1.2 och 1.5 i 'Flervariabelanalys med MATLAB'

Detta är det första av sex stycken PM för datorövningarna. För att bli godkänd från datorövningarna krävs att du inför handledare redovisat och blivit godkänd på de två första uppgifterna på var och en av dessa sex PM (se *Obligatoriska uppgifter* nedan). Övriga fyra uppgifter som finns på varje PM är frivilliga men kan ge bonuspoäng för överbetyg (se *Kryssuppgifter* på baksidan av detta blad). För varje godkänd redovisning av dessa frivilliga extrauppgifter erhåller du ett s.k. kryss, att addera till övriga kryss som erhålls vid kryssredovisningarna på måndagar.

Det är tänkt att kursdeltagarna i första hand skall arbeta med kompendiet Flervariabelanalys med MATLAB (finns under Dokument på kurshemsidan). Det förutsätts också att kursdeltagarna själva jobbar med materialet utanför schemalagd undervisningstid och för att få störst utbyte bör arbetet med de olika avsnitten göras i samband med att motsvarande område behandlas på föreläsningar och övningar. Under datorövningarna i datorsal, då alla bör jobba två och två framför respektive dator, finns dessutom möjlighet att få hjälp av handledare. Du är också välkommen att ställa frågor angående MATLAB vid de vanliga räkneövningarna. Föreläsningstid kan också gå bra men då är utrymmet för frågor något begränsad.

Obligatoriska uppgifter

Uppgift 1: (se avsnitt 1.5 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Plotta ...

(a) kurvan $x = t^3 - 3t, y = t^4 + 4t$, för $-2.5 < t < 2.5$

(b) cykloiden $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$, för $0 < t < 5\pi$

(Kurvan beskriver den väg en myra, som fastnat på ett hjul, färdas när hjulet rullar framåt. Använd `axis equal` för en mer skalriktig figur)

(c) koniska helixen $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$, för $0 < t < 30$

(se uppgift 11.3.17 i Adams)

Uppgift 2: (se avsnitt 1.1 & 1.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Plotta grafen till följande funktion på området $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$.

$$f(x, y) = 3(1 - x)^2 e^{-x^2 - (y+1)^2} - 10\left(\frac{x}{5} - x^3 - y^5\right) e^{-x^2 - y^2} - \frac{1}{3} e^{-(x+1)^2 - y^2}$$

Plotta även nivåkurvor till funktionen. Hur ser nivåkurvorna ut nära de lokala extrempunkterna (max/min)?

Kryssuppgifter

Uppgift 3: (se avsnitt 1.1 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Plotta (på lämpligt område) graferna till följande funktioner

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Tips: Ovanstående grafer blir snyggast i MATLAB om man använder polära koordinater dvs. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ för att bilda plottpunkter (gör en mesh för R och θ och använd dem för att skapa X och Y). Prova att plotta ovanstående grafer både med rektangulära och polära koordinater, och jämför.

Uppgift 4: (se avsnitt 1.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Plotta kurvan $2x^3 + y^3 = 10$ i planet och försök att i figuren uppskatta vilken punkt på kurvan som ligger närmast origo.

Tips: Plotta en punkt/stjärna i origo, i samma figur som kurvan, så blir det lättare att uppskatta avståndet. För att jämföra avstånd bör man också ha samma skalning på x - och y -axeln, vilket åstadkoms med kommandot `axis equal`.

Uppgift 5: Plotta nivåkurvan $f(x, y) = 0$ till funktionen $f(x, y) = x \sin y + y \cos x - xy$ på området $-15 \leq x \leq 15$, $-3 \leq y \leq 3$. Nivåkurvan delar in xy -planet i ett antal områden. Förklara varför funktionen $f(x, y)$ inte växlar tecken inom var och en av områdena. I vilka av områdena är $f(x, y) > 0$?

Tips: Plotta t.ex. nivåkurvan $f(x, y) = 0.2$ i samma figur eller använd `contourf`.

Uppgift 6: $P_1 = (1, 1, 0)$ och $P_2 = (0, 1, 1)$ är två punkter på de ytor som finns beskrivna i deluppgift (a), (b) och (c) nedan. Din uppgift är att försöka bestämma en så kort väg som möjligt, utefter respektive yta, mellan P_1 och P_2 .

(a) cylindern $x^2 + z^2 = 1$

(b) sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

(c) funktionsytan $z = f(x, y)$, där $f(x, y) = 2 - x - (1 - 2x)^2 - 2(1 - y)^2$

Tips: T.ex. är $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + f(t, 1)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$, parametrisering av en kurva mellan punkterna utefter ytan $z = f(x, y)$ i deluppgift (c). Längden av kurvan mellan punkterna ges av integralen $\int_0^1 |\mathbf{r}'(t)| dt$ som t.ex. kan beräknas med kommandot `quad` i MATLAB. Detta exempel på kurva ger inte den kortaste vägen mellan punkterna utefter ytan. Försök hitta parametrisering av en annan kurva utefter ytan som ger kortare väg. Det finns en kortaste väg men det är inte säkert du kan bestämma den, och det kan krävas många försök för att komma nära det optimala. Plotta gärna de kurvor du kommer på, tillsammans med ytan den ligger på, för att lista ut hur du skulle kunna göra bättre. Vi kan väl tävla om äran att lyckas bäst.