

Datorövning 5 - Multipelintegraler

avsnitt 3.1–3.3 i 'Flervariabelanalys med MATLAB'

Information om genomförande och krav, vad det gäller datorövningarna, finns i PM för Datorövning 1 och på kurshemsidan.

Obligatoriska uppgifter

Uppgift 1: (se avsnitt 3.1 & 3.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Beräkna följande integraler m.h.a. `dblquad` resp. `triplequad`.

(a) $\iint_D \sqrt{y} \sin(xy) \, dx dy$, där $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi/2$

(b) $\iint_D e^{y/x} \, dx dy$, där $D: 1 \leq x \leq 2 - y, |xy| \leq 1$

(c) $\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$, där $D: x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 2$

Uppgift 2: (se avsnitt 3.3 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) \, dx dy dz$$

där $D: x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, dels exakt för hand och dels med Monte Carlo-metoden. Använd $N = 10, 100, 1000, 10000$ punkter, och upprepa varje sådan beräkning 10-15 gånger. Studera hur relativa felet varierar från gång till gång då N hålls fixt och hur relativa felen förändras då N ökas.

Anm. Om $\tilde{I}$ är en approximation av det exakta värdet I så är det relativa felet $\left| \frac{I - \tilde{I}}{I} \right|$

Kryssuppgifter

Uppgift 3: (se avsnitt 3.1 & 3.3 i kompendiet 'Flervariabelanalys med MATLAB')

Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

där $D : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4$, med de metoder som anges i (a)-(d) nedan. Låt MATLAB ta tiden för beräkningarna med respektive metod. Beräkna även (för hand) integralens exakta värde och undersök de relativa felen du får med respektive metod. Jämför metoderna m.a.p. tidsåtgång och fel, och försök bedöma deras effektivitet.

- (a) Beräkna en Riemannsumma för dubbelintegralen.
- (b) Använd Simpsons formel.
- (c) Använd `dblquad`.
- (d) Använd Monte Carlo-metoden.

Uppgift 4: (se avsnitt 3.1 & 3.3 i kompendiet 'Flervariabelanalys med MATLAB')

Låt D vara det område i planet som begränsas av nivåkurvorna $x \sin y + y \cos x = -4$ och $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 2$, och som innehåller punkten $(-2, 2)$. Plotta området D , som i exemplet i avsnitt 3.3, och beräkna dess tyngdpunkt.

Uppgift 5: Skriv ett program `simpson.m` med anropet `I=simpson(f,a,b,c,d,m)` som använder Simpsons formel för att beräkna integralen till en funktion $f(x, y)$ på en rektangel $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$. Indata `m` i anropet anger antalet delintervall i x -led och y -led. Testa sedan ditt program på någon integral.

Uppgift 6: Beräkna volymen av ett fyrdimensionellt klot $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq 1$ med hjälp av Monte Carlo - metoden. Försök även för hand beräkna volymen exakt och jämför.