

Datorövning 6 - Vektoranalys

avsnitt 1.6 & 4.1–4.3 i 'Flervariabelanalys med MATLAB'

Information om genomförande och krav, vad det gäller datorövningarna, finns i PM för Datorövning 1 och på kurshemsidan.

Obligatoriska uppgifter

Uppgift 1: (se avsnitt 1.6 i kompendiet 'Flervariabelanalys med MATLAB')

Om en kurva i xz -planet med parametrisering $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + z(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$, roterar kring z -axeln skapas en s.k. rotationsyta. En sådan parametreras enklast genom;

$$\begin{cases} x = x(t) \cos \theta \\ y = x(t) \sin \theta \\ z = z(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b, 0 \leq \theta < 2\pi$$

Använd detta för att parametrisera den torus som bildas då cirkeln $(x - 3)^2 + z^2 = 4$ roterar kring z -axeln. Plotta sedan den del av torusen som ligger utanför cylindern $x^2 + z^2 = 1$ (använd knepet med `NaN`).

Uppgift 2: (se avsnitt 4.1 & 4.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys med MATLAB')

Antag att $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (2 - x + y)\mathbf{j}$ beskriver ett plant kraftfält. Plotta kraftfältet på området $-2 < x < 2$, $-2 < y < 2$, samt några av dess strömlinjer i samma figur. Antag att en partikel, under inverkan av kraftfältet $\mathbf{F}$ (och andra krafter), rör sig utefter kurvan $y = x^3$ från punkten $(-1, -1)$ till $(1, 1)$. Försök uppskatta ur figuren om det totala arbetet som kraftfältet uträttar är positivt eller negativt (plotta partikelbanan i samma figur). Undersök sedan om din uppskattning är rätt genom att beräkna det exakta värdet på arbetet (för hand med penna och papper).

Kryssuppgifter

Uppgift 3: (se avsnitt 4.1 & 4.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys med MATLAB')

Antag att $\mathbf{F} = (x - 1)\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ beskriver hastighetsvektorerna i en stationär strömning. Plotta hastighetsfältet på området $0 < x < 3$, $1 < y < 4$, $-2 < z < 2$, samt några av dess strömlinjer i samma figur (välj "startpunkterna" för strömlinjerna på någon lämplig yta t.ex. i planet $y = 3$). Illustrera också med hjälp av `streamparticles` hur partiklar rör sig utefter strömlinjerna.

Uppgift 4: (se avsnitt 4.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys med MATLAB')

Låt $\mathbf{F}$ vara samma hastighetsfält som i uppgift 3 ovan och låt Ω vara det område som begränsas av halvsfären $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ och cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$. Illustrera strömningen ut/in ur området Ω genom att plotta ytan till området och ett antal hastighetsvektorer på ytan. Plotta även hastighetsvektorernas projektion i normalriktningen och använd färg för att visa hur stort flödet är genom ytan. Försök uppskatta ur figuren om det totala flödet ut ur området är positivt eller negativt. Undersök sedan om din uppskattning är rätt genom att beräkna det exakta värdet på flödet (för hand med penna och papper).

Uppgift 5: Plotta de konservativa vektorfälten i (a) och (b) nedan. Plotta också i samma figur ett antal fältlinjer och några ekvipotential-kurvor/ytor till vektorfälten. Försök verifiera ur figuren att fältlinjerna skär ekvipotential-kurvorna/ytorna med rät vinkel.

(a) $\mathbf{F} = (3x^2y - 1)\mathbf{i} + (x^3 + 2y)\mathbf{j}$ (ett plant vektorfält)

(b) $\mathbf{F} = (2xy - z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} - (2zx - y^2)\mathbf{k}$ (se uppgift 15.2.5 i Adams)

Uppgift 6: Använd metoderna i avs. 4.3 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB' för att illustrera divergensen och rotationen hos följande vektorfält;

(a) $\mathbf{F} = \cos(x^2 + y^2)\mathbf{i} + \cos(x - y)\mathbf{j}$ (ett plant vektorfält)

(b) $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$ (se uppgift 16.1.6 i Adams)