

Flervariabelanalys E2/V2

TMA043/MVE085

läsåret 2013/14

Vägledning till lärmålen
Godkäntdelen, del 2

För att bli godkänd på kursen skall du kunna ...

- **känna till och utnyttja dubbelintegralens egenskaper vid problemlösning**

Förtydligande: Här avses främst de egenskaper som finns i markerad ruta på sid 794. Ibland kan man använda symmetriargument för att beräkna eller förenkla integraler. T.ex. är det (pga. egenskap (c), (d) och (h)) så att om funktionen är udda i x (dvs. $f(-x, y) = -f(x, y)$) och integrationsområdet är symmetriskt kring y -axeln (dvs en spegling i y axeln) så är integralen $= 0$.

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 14.1

Exempel ur kursboken: 14.1: Ex.2,3,4

Övningsuppgifter: 14.1: 13, 15, 17

Gamla tentamensuppgifter: -

- **beräkna dubbelintegral genom upprepad enkelintegration**

Förtydligande: Notera speciellt att fixa gränser i en itererad dubbelintegral $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ motsvarar integration över en rektangel. Om integrationsområdet inte är en rektangel så kommer med nödvändighet gränserna m.a.p. den ena variabeln att bero på den andra variabeln. Gränserna på den yttre integralen måste dock alltid vara fixa värden t.ex. $\int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx$ eller $\int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 14.2

Exempel ur kursboken: 14.2: Ex.1,2,3,4

Övningsuppgifter: 14.2: 3,5,9,13,19

Gamla tentamensuppgifter: 081020.5c, 090605.3a, 100115.1d
101021.3a, 111020.3a, 120901.3b

- avgöra huruvida en integral är generaliserad och i så fall förklara vad som gör den generaliserad

Förtydligande: När man får uppgiften att beräkna en viss integral så bör man alltid börja med att undersöka huruvida den är generaliserad eller ej. Detta lärandemål ingår därför som en naturlig del av de flesta uppgifter på integraler. Ofta skall man då även avgöra om integralen är konvergent eller divergent, samt bestämma dess värde (om det finns), men man kan också tänka sig en uppgift där det bara gäller att undersöka om och varför en viss integral är generaliserad.

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 14.3

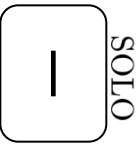
Exempel ur kursboken: 14.3: Ex.1,2,3,4

Övningsuppgifter: 14.3: 3,7,9

Gamla tentamensuppgifter: -

Lärmål 4

Del 2, för godkänt



- **beräkna generaliserad dubbelintegral för $f(x, y) \geq 0$ och därigenom avgöra konvergens/divergens**

Förtydligande: Man kan ofta (mha. egenskap (f), sid 794) avgöra om en integral är konvergent eller divergent utan att beräkna integralen, men detta är inget mål för denna kurs (varken för godkänt eller för överbetyg). Om integranden inte skiftar tecken dvs om $f(x, y) \geq 0$ eller $f(x, y) \leq 0$ för alla $(x, y) \in D$ så kan man beräkna en generaliserad integral med samma tekniker som en vanlig integral. Vid insättning av integrationsgränserna får man dock i allmänhet beräkna ett eller flera gränsvärden. Det är därför viktigt att du erinrar dig de viktigaste "standardgränsvärdena" från envariabelkursen.

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 14.3

Exempel ur kursboken: 14.3: Ex.1,2,3,4

Övningsuppgifter: 14.3: 3,7,9

Gamla tentamensuppgifter: 090110.5c, 090828.1d, 120111.3a, 121025.1b

- **veta vad som menas med medelvärdet av en funktion av två eller tre variabler på ett område.**

Förtydligande: Detta innebär naturligtvis också att du kan beräkna medelvärdet av en funktion på ett område. Avsnitt 14.3 beskriver medelvärde för funktioner av två variabler men medelvärdet av en funktion av tre variabler definieras analogt;

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{Volymen av } K} \iiint_K f(x, y, z) dx dy dz$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 14.3

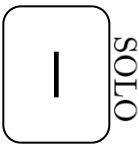
Exempel ur kursboken: 14.3: Ex.5,6

Övningsuppgifter: 14.4: 15

Gamla tentamensuppgifter: 110827.3b

Lärmål 6

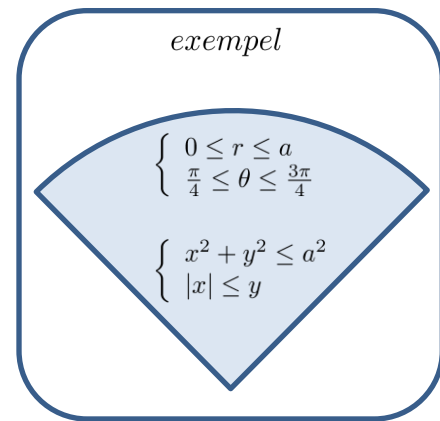
Del 2, för godkänt



- ange sambandet mellan cartesiska och polära koordinater samt sambandet mellan areaelementen

Förtydligande: Detta innefattar också att du i polära koordinater kan beskriva punkter eller områden som är givna i Cartesiska koordinater, och vice versa.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad dxdy = r dr d\theta$$



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 14.4

Exempel ur kursboken: 14.4: Ex.1-6

Övningsuppgifter: 14.4: 3,9,15,21,23

Gamla tentamensuppgifter: 081020.3a, 090605.3b

- ange hur ett område givet i cartesiska koordinater transformeras vid övergång till andra koordinater och omvänt

Förtydligande: Om t.ex. ett område är beskrivet med ett eller flera villkor (t.ex. olikheter) i Cartesiska koordinater så skall du kunna ersätta dem med andra villkor i de nya koordinaterna som beskriver samma område. I de uppgifter som kan komma på fråga här så finns det en stark koppling mellan områdets beskrivning i de Cartesiska koordinaterna och uttrycken för de nya koordinaterna (se t.ex. Ex.8, sid 815).

exempel

$$\begin{cases} a \leq f(x, y) \leq b \\ c \leq g(x, y) \leq d \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = f(x, y) \\ v = g(x, y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq u \leq b \\ c \leq v \leq d \end{cases}$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 14.4

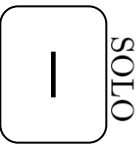
Exempel ur kursboken: 14.4: Ex.7-11

Övningsuppgifter: 14.4: 13,32,35b

Gamla tentamensuppgifter: -

Lärmål 8

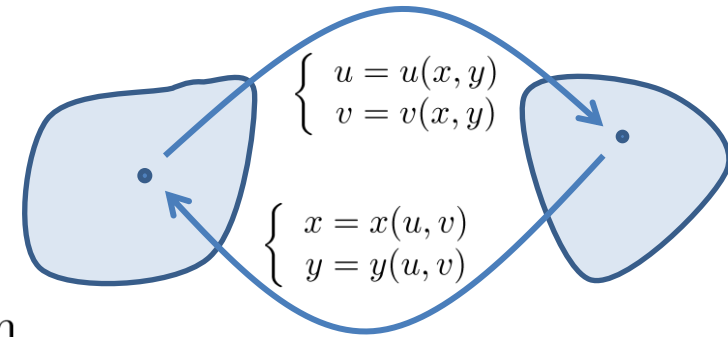
Del 2, för godkänt



- **känna till vad som menas med att en transformation $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är ett-ett**

Förtydligande: se sid 813 för definition mm

Detta lärmål är nödvändigt att kunna för att överhuvud taget kunna göra variabelsubstitution och därför en naturlig del av alla uppgifter i avsnitt 14.4 och 14.6. Du skall också i enklare fall kunna visa att en transformation/avbildning är ett-ett genom att ta fram den inversa avbildningen.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 12.8, 14.4, 14.6

Exempel ur kursboken: se speciellt Ex.6-11 i avs. 14.4

Övningsuppgifter: se speciellt 14.4: 13, 32, 35b

Gamla tentamensuppgifter: 130831.4a

- **beräkna dubbelintegraler med hjälp av variabelsubstitution**

Förtydligande: Om övergång till polära koordinater underlättar (eller t.o.m. möjliggör) beräkning av en viss integral så förväntas du upptäcka det själv utan att det står i uppgiften. Andra substitutioner som kan tänkas nödvändiga för att beräkna en viss integral kommer ges som tips i uppgiften.

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du dv$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 14.4

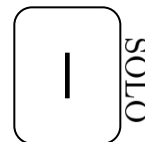
Exempel ur kursboken: 14.4: 1-10

Övningsuppgifter: 14.4: 3,9,11,15,21,23,32,35b

Gamla tentamensuppgifter: 081020.3ab, 090605.3b, 101021.3b
130831.4b

Lärmål 10

Del 2, för godkänt



- **beräkna trippelintegraler genom upprepad enkelintegration**

Förtydligande: Notera speciellt att fixa gränser i en itererad trippellintegral

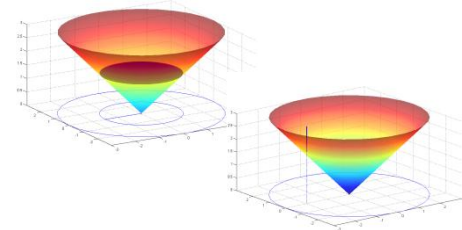
$\int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f g(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$ motsvarar integration över ett rätblock.

Ibland kan man med fördel dela upp en trippelintegral i en enkel- och en dubbelintegral. Detta kan göras på i huvudsak två olika sätt;

Om $K : a \leq x \leq b, (x, y) \in D_x$ (D_x är områden i yz -planet som beror på x) så är $\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right) dx$

eller om $K : (x, y) \in D, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)$ så är

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 14.5

Exempel ur kursboken: 14.5: Ex.2-6

Övningsuppgifter: 14.5: 1,5,9,14,16

Gamla tentamensuppgifter: 091024.3, 110112.3b, 130116.3b

- ange sambanden mellan cartesiska och sfäriska/cylindriska koordinater samt sambandet mellan volymelementen

Förtydligande: Detta innefattar också att du i cylindriska resp sfäriska koordinater kan beskriva punkter eller områden som är givna i Cartesiska koordinater, och vice versa.

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \text{obs! i sfäriska koordinater} \\ \text{är spec } x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \end{array} \right) \\ dxdydz = r drd\theta dz & dxdydz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \end{array}$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 10.6 & 14.6

Exempel ur kursboken: 10.6: Ex.1-4, 14.6: Ex.2-5

Övningsuppgifter: 10.6: 1-14, 14.6: 1,3,13,15,16

Gamla tentamensuppgifter: 090110.3ab, 090828.3a, 090828.1e
100115.3, 100827.3a, 110112.5a, 111020.3b, 120111.3b, 130116.3a
130831.3a

- **beräkna trippelintegraler med hjälp av variabelsubstitution**

Förtydligande: Om övergång till cylindriska eller sfäriska koordinater underlättar (eller t.o.m. möjliggör) beräkning av en viss integral så förväntas du upptäcka det själv utan att det står i uppgiften. Andra substitutioner som kan tänkas nödvändiga för att beräkna en viss integral kommer ges som tips i uppgiften.

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 14.6

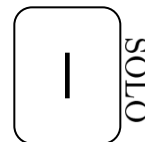
Exempel ur kursboken: 14.6: Ex.1-5

Övningsuppgifter: 14.6: 1,3,13,15,16

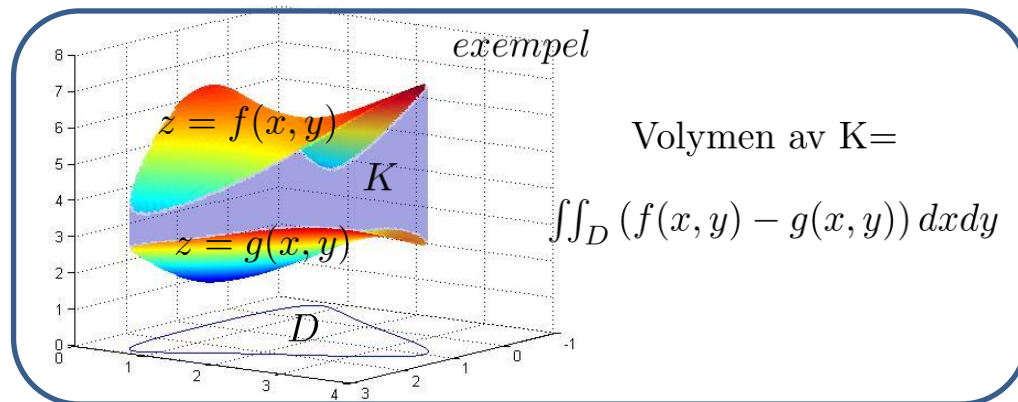
Gamla tentamensuppgifter: 090828.1e, 100115.3b, 111020.3b
120111.3b, 130831.3a

Lärmål 13

Del 2, för godkänt



- tillämpa dubbel- och trippelintegral för att bestämma t.ex. area, volym, massa, laddning och tyngdpunkt/masscentrum



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 14.1-14.6

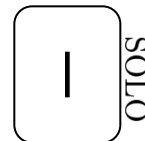
Exempel ur kursboken: 14.1: Ex.2,3,4, 14.2: Ex.1,4,
14.4: Ex.3,5,7,8, 14.5: Ex.1,4, 14.6: Ex.1,3,4

Övningsuppgifter: 14.1: 13, 14.2: 19, 14.4: 21,23, 14.5: 14, 14.6: 1,3

Gamla tentamensuppgifter: 081020.3c, 090110.3b, 090828.1e
091024.3, 100115.3, 100827.3b, 101021.3b, 110112.3b
111020.3b, 120111.3b, 130831.3a

Lärmål 14

Del 2, för godkänt



- skissa ett vektorfält i planet, skissa fältlinjer till det och redogöra för sambandet mellan vektorfält och fältlinjer

Förtydligande: Du skall kunna bestämma och rita ut geometriska vektorer som illustrerar ett vektorfälts styrka och riktning i olika punkter. Om inget annat sägs får du själv välja ut lämpliga punkter i vilket vektorpilarna ritas ut. Utifrån uppritade pilar skall du sedan kunna skissa på fältlinjer. För godkänt behöver du inte kunna bestämma ekvationerna för fältlinjerna (detta krävs dock för överbetyg). Du skall dock känna till och kunna förklara sambandet $\mathbf{r}'(t) = \lambda(t)\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ (se sid 844)

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 15.1

Exempel ur kursboken: 15.1: Ex.1,2

Övningsuppgifter: 15.1: 3,6

Gamla tentamensuppgifter: 120901.4a, 130116.4a

- **definiera begreppet konservativt vektorfält i ett område och beräkna potential till ett konservativt fält**

Förtydligande: Du skall kunna redogöra för vad som menas med att ett vektorfält är konservativt i ett område och vad en (skalär) potential är (se sid 849). Du skall speciellt kunna avgöra om en viss funktion är potential till ett givet vektorfält (se Ex 1). Du skall också kunna avgöra om ett vektorfält är konservativt genom att försöka ta fram en potential. Det är dock naturligt att man i sådana fall först kontrollerar om de nödvändiga villkoren på sid 851 är uppfyllda. Om inget annat sägs kan du även använda sats 16.2.4 för att visa att ett visst vektorfält är konservativt. Det är i sådana fall viktigt att du visar att villkoren i satsen är uppfyllda.

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 15.2

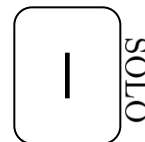
Exempel ur kursboken: 15.2: Ex.3,4,5

Övningsuppgifter: 15.2: 1,4,5

Gamla tentamensuppgifter: 081020.5a, 081020.1e, 090828.2b
100827.1d, 101021.4a, 110112.4a, 130831.3b

Lärmål 16

Del 2, för godkänt



- känna till nödvändiga villkor för att ett vektorfält skall vara konservativt och med hjälp av dessa kunna visa att ett givet vektorfält inte är konservativt

Förtydligande: Du skall känna till villkoret för konservativa vektorfält i planet, liksom villkoren för konservativa vektorfält i rummet (se sid 851). Om villkoren inte är uppfyllda så kan vi direkt konstatera att vektorfältet inte är konservativt. Om villkoren är uppfyllda så är det mycket möjligt att vektorfältet är konservativt, men det är inte helt säkert (se t.ex. Ex. 5 sid 854). Detta kan fastställas först om man kan bestämma en potential eller verifierat att villkoren i sats 16.2.4 är uppfyllda.

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 15.2

Exempel ur kursboken: 15.2: Ex.2,3,4

Övningsuppgifter: 15.2: 3

Gamla tentamensuppgifter: 090605.1a, 091024.4a, 120901.3a

- **förklara sambandet mellan nivåkurvor till potential och fältlinjerna till ett konservativt vektorfält.**

Förtydligande: Sambandet finns beskrivet på sid 851

Du skall för ett givet konservativt vektorfält kunna beskriva, och i enklare fall skissa, på nivåkurvorna till en potential (dvs. ekvipotentialkurvorna).

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 15.2

Exempel ur kursboken: 15.2: Ex.3

Övningsuppgifter: skissa ekvipotentialkurvorna till fältet i 15.1.6

Gamla tentamensuppgifter: -

- definiera begreppet kurvintegral av en funktion och beräkna sådana integraler genom parametrisering av kurvan

Förtydligande: Om kurvan inte redan är parametriserad så måste du själv parametrisera kurvan (se lärmål 8 i dokumentet *Vägledning till lärmålen* för godkäntdelens del 1).

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 15.3

Exempel ur kursboken: 15.3: Ex.1,2,3

Övningsuppgifter: 15.3: 2,3,7,9

Gamla tentamensuppgifter: 081020.2ab, 091024.4c, 110112.3a
120111.4a

- definiera begreppet kurvintegral av ett vektorfält och beräkna sådana integraler genom parametrisering av kurvan

Förtydligande: Om kurvan inte redan är parametriserad så måste du själv parametrisera kurvan (se lärmål 8 i dokumentet *Vägledning till lärmålen* för godkäntdelens del 1).

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} \, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 15.4

Exempel ur kursboken: 15.4: Ex.1,2,4

Övningsuppgifter: 15.4: 1,3,4,15,17,CR.7

Gamla tentamensuppgifter: 090605.1a, 091024.4b, 101021.4b, 110827.5b, 111020.4a, 120111.4b, 120901.4b, 121025.4b, 130116.4b

- **tillämpa satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen**

Förtydligande: Här avses sats 15.4.1 på sid 866. Observationen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a))$$

som finns i beviset av satsen skall snarare ses som en del av resultaten i satsen. Satsen är speciellt användbar för att beräkna kurvintegraler över vektorfält som är konservativa, men kan även användas då fälten är "nästan konservativa" (se Ex.4 sid 868). Notera också att det finns en tydlig koppling mellan denna sats och Greens sats i avs. 16.3

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 15.4

Exempel ur kursboken: 15.4: Ex.3,4

Övningsuppgifter: 15.4: 5,7,9

Gamla tentamensuppgifter: 090110.2bc, 090828.2c, 100827.1d
101021.4b, 110827.5a, 121025.4b

- parametrisera sfärer, cylindrar, koner, plan och funktionsytor

Förtydligande: Du skall kunna bestämma en lämplig parametrisering av sådana ytor då dessa är beskrivna på annat sätt t.ex. genom ekvationer och olikheter eller i löpande text. De cylindrar och koner som du förväntas kunna parametrisera har en centralaxel som är parallell med någon av koordinataxlarna.

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 15.5

Exempel ur kursboken: 15.5: 1, 2, 4, 5

Övningsuppgifter: 15.5: 3, 23

Gamla tentamensuppgifter: 100115.4, 100827.4a, 110827.3a
111020.5a, 120111.5a, 120901.5a

- definiera begreppet ytintegral av en funktion över en yta och beräkna sådana integraler då ytan är parametriserad eller av vanligare typ som du själv bör kunna parametrisera.

Förtydligande: Med yta av vanligare typ avses de ytor som finns uppräknade i lärmål 21 dvs. sfärer, cylindrar, koner, plan och funktionsytor. Du bör också känna till att areaelementet på en sfär med radie a ges av $dS = a^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$ i de sfäriska koordinaterna ϕ, θ . Ytintegraler över nivåytor ingår endast i överbetygsmålen.

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$$
$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + g_1(x, y)^2 + g_2(x, y)^2} \, dx dy$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 15.5

Exempel ur kursboken: 15.5: 5, 6, 9

Övningsuppgifter: 15.5: 3, 17, 20, 23, K: 13, 14, 15, 16

Gamla tentamensuppgifter: 100115.4, 100827.4a, 110112.5b, 121025.3a
130831.5a

- definiera begreppet flödesintegral och beräkna sådana integraler då ytan är parametriserad eller av vanligare typ som du själv bör kunna parametrisera

Förtydligande: Med yta av vanligare typ avses de ytor som finns uppräknade i lärmål 21 dvs. sfärer, cylindrar, koner, plan och funktionsytor. Flödesintegraler över nivåytor ingår endast i överbetygsmålen.

$$\iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{N}}(x, y, z) dS = \pm \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv$$
$$\iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{N}}(x, y, z) dS = \pm \iint_D \mathbf{F}(x, y, f(x, y)) \cdot (-f_1(x, y)\mathbf{i} - f_2(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}) dx dy$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 15.6

Exempel ur kursboken: 15.6: Ex.1-5

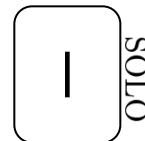
Övningsuppgifter: 15.6: 1,5,9,11

Gamla tentamensuppgifter: 090605.4, 090828.3c, 100827.4b

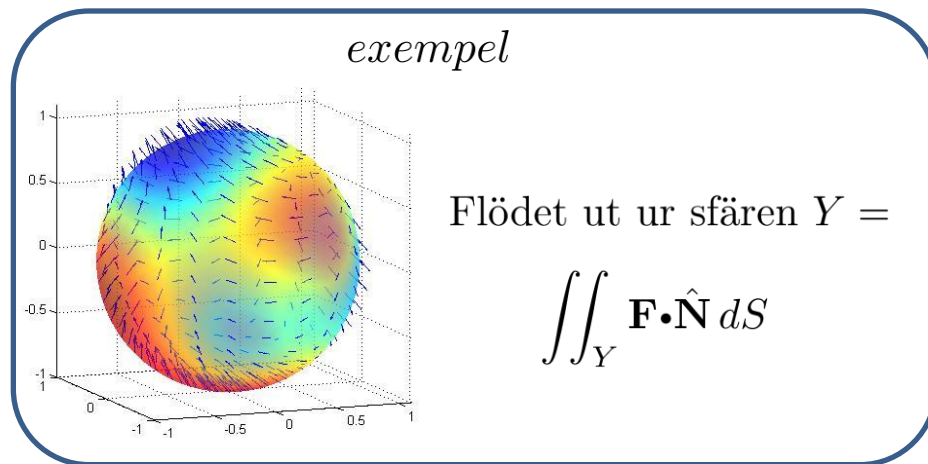
101021.5b, 110827.4, 111020.5b, 120111.5c, 120901.5b, 121025.5
130116.5, 130831.5b

Lärmål 24

Del 2, för godkänt



- tillämpa kurv- och ytintegral för att bestämma t.ex. längd, arbete, area, massa, masscentrum, laddning och flöde



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 15.3-6

Exempel ur kursboken: 15.3: Ex.2,3, 15.6: Ex.1-5

Övningsuppgifter: 15.3: 3, 9, 15.4: 7, CR.7, 1
5.5: 3, 17, 20, 23, 15.6: 1, 5, 9, 11

Gamla tentamensuppgifter: 090110.2c, 090828.2c, 090828.3c

091024.4b, 091024.1d, 100827.4, 100827.1d, 101021.4b, 101021.5b
110827.4, 111020.5b, 120111.5c, 120901.4c, 120901.5b, 121025.5
130116.5b, 130831.5b

Lärmål 25

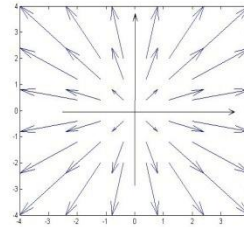
Del 2, för godkänt

SOLO

- beräkna divergens, $\operatorname{div} \mathbf{F}$, och rotation, $\operatorname{curl} \mathbf{F}$, för ett vektorfält $\mathbf{F}$

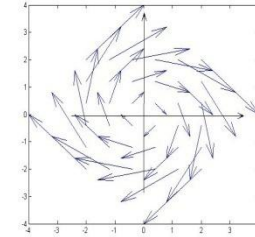
Förtydligande: Du skall också förstå vad divergensen och rotationen säger om ett visst vektorfält t.ex. skall du kunna tolka innebörden av sats Sats 1 & 2 i avsnitt 16.1.

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$
$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$



Här är $\operatorname{div} \mathbf{F}$ stort

exempel



Här är $\|\operatorname{curl} \mathbf{F}\|$ stort

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 16.1

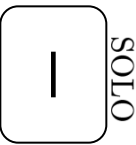
Exempel ur kursboken: 16.1: Ex.1,2

Övningsuppgifter: 16.1: 3,6,7

Gamla tentamensuppgifter: 090605.4b, 100827.1c, 101021.5a
120901.3, 121025.4a

Lärmål 26

Del 2, för godkänt

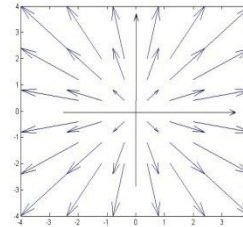


- definiera begreppen källfritt (solenoidal) och virvelfritt (irrotational) vektorfält

Förtydligande: Detta innebär naturligtvis också att du skall kunna undersöka om ett givet vektorfält är källfritt resp virvelfritt.

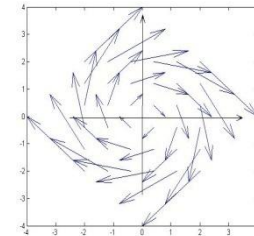
källfritt
 $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ i D

virvelfritt
 $\operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$ i D



virvelfritt

exempel



källfritt

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 16.2

Exempel ur kursboken: 16.2: första delen av Ex.2

Övningsuppgifter: 16.2: -

Gamla tentamensuppgifter: 081020.5a, 090110.2a, 090828.3b
100827.1c, 120111.5b

- **tillämpa sats 16.2.4**

Förtydligande: Du skall kunna använda satsen för att visa att ett givet vektorfält är konservativt i ett område. I så fall måste du (som alltid) verifiera att villkoren i satsen är uppfyllda, och framför allt poängtera det i en ev. lösning där du använder satsen. Notera speciellt att satsen innebär att de nödvändiga villkoren i avsnitt 15.2 (sid 851) i själva verket är tillräckliga för att konstatera att ett visst vektorfält är konservativt på ett område, under förutsättning att området är enkelt sammanhängande.

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

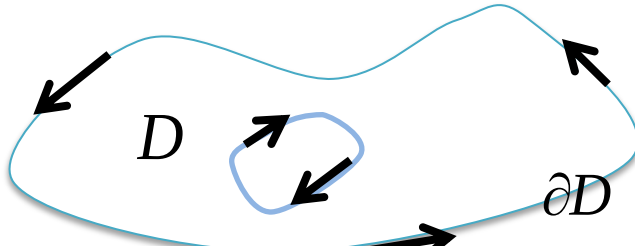
Avsnitt: 16.2

Exempel ur kursboken: -

Övningsuppgifter: -

Gamla tentamensuppgifter: 110827.5a

- tillämpa Greens formel (Sats 16.3.6) i relativt okomplicerade situationer

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} & \equiv \oint_{\partial D} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA \\
 & \equiv \iint_D \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dxdy
 \end{aligned}$$


Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 16.3

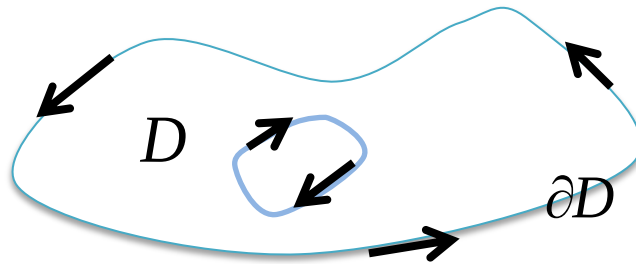
Exempel ur kursboken: 16.3: Ex.1,2,3,4

Övningsuppgifter: 16.3: 1,3,5

Gamla tentamensuppgifter: 081020.2c, 090110.1e, 100115.1e, 110112.4b, 111020.4b, 130116.4b

- beräkna area av område i planet med hjälp av Greens formel

$$\text{Arean av } D = \oint_{\partial D} x \, dy = - \oint_{\partial D} y \, dx = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x \, dy - y \, dx$$



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 16.3

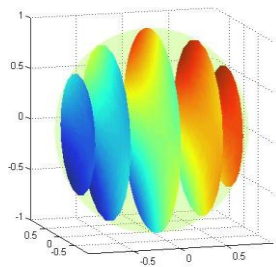
Exempel ur kursboken: 16.3: Ex.1,2

Övningsuppgifter: 16.3: 5

Gamla tentamensuppgifter: 120901.4c

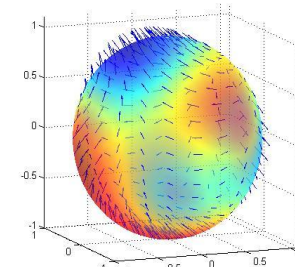
- tillämpa divergenssatsen (Sats 16.4.8) i relativt okomplicerade situationer

Förtydligande:



$$\iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

$$\iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \oiint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$



$$\oiint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 16.4

Exempel ur kursboken: 16.4: Ex. 1-5

Övningsuppgifter: 16.4: 1,3,5,7

Gamla tentamensuppgifter: 091024.1d, 120901.5b, 121025.5