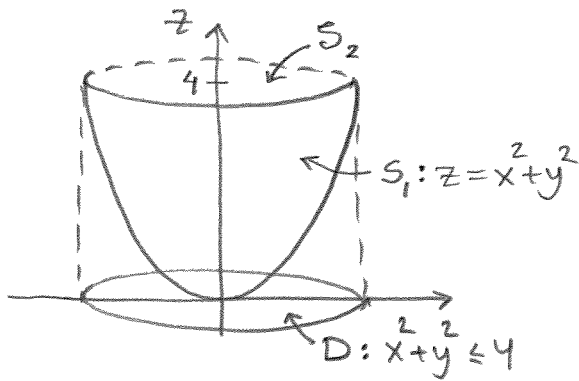


Uppg. Bestäm flödet av fältet $F = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ut ur området $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$.

lös



$$S_1: z = x^2 + y^2, (x, y) \in D$$

$$\hat{N} dS = \frac{1}{\sqrt{2}} (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}) d$$

↑ + ger efterfrågad riktning.

på S_1 är

$$F = x(x^2 + y^2)\mathbf{i} + y(x^2 + y^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$$

$$\iint_{S_1} F \cdot \hat{N} dS = \iint_D (2x^2(x^2 + y^2) + 2y^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)) dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (2r^4 - r^2) r dr \right) d\theta = 2\pi \left[\frac{r^6}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi \left(\frac{16}{3} - 1 \right) = \frac{104\pi}{3}$$

polära koordinater

På S_2 är $\hat{N} = \mathbf{k}$ och $F = 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ så

$$\iint_{S_2} F \cdot \hat{N} dS = \iint_{S_2} 4 dS = 4 \underbrace{\iint_{S_2} dS}_{\text{arean av } S_2} = 4 \cdot \pi 2^2 = 16\pi$$

så det totala flödet ut ur området är

$$\frac{104\pi}{3} + 16\pi = \underline{\underline{\frac{152\pi}{3}}}$$

Anm. S_1 kan också parametriseras med;

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = r^2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 < r < 2 \\ 0 < \theta < 2\pi \end{matrix}$$

men kalkylerna blir då längre

Bättre att vänta med polära koord.

tills dubbelintegralen skall beräknas.