Gränsvärden till funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Syftet med dessa sidor är att analysera gränsvärdesbegreppet och att komma fram till metoder för att avgöra om en funktion har gränsvärde och att i så fall beräkna det.

Exempel 1: Betrakta funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^6+y^3}.$$

När x och y båda närmar sig noll får vi ett oegentligt uttryck, "0/0". För att få bättre känsla för detta kan vi sätta $y = kx$; vi får då

$$f(x,y) = f(x,kx) = \frac{x^3}{x^2+k^6x^6+k^3x^3} = \frac{x}{1+k^6x^4+k^3x} \to 0 \quad \text{då } x \to 0.$$

Om vi istället sätter $y = -x^{2/3} = -\sqrt[3]{x^2}$, så får vi

$$f(x,y) = f(x,-x^{2/3}) = \frac{x^3}{x^2+x^4-x^2} = \frac{1}{x},$$

som saknar gränsvärde då $x \to 0$. $\square$

Vi ser här att om (x,y) närmar sig $(0,0)$ längs en rät linje, $y = kx$, så går $f(x,y)$ mot 0. Det ligger då nära till hands att säga att $f(x,y)$ har gränsvärdet 0 då (x,y) går mot $(0,0)$. Men om (x,y) närmar sig $(0,0)$ längs kurvan $y = -x^{2/3}$, så saknas gränsvärde, och det verkar lite underligt att inte ta hänsyn till det också. En möjlig definition vore då att säga att $f(x,y)$ har gränsvärdet 0 då (x,y) går mot $(0,0)$ om $f(x,y(x))$ går mot 0 då x går mot 0 för alla kurvor $y = y(x)$ sådana att $y(0) = 0$. Ett uppenbart problem är att kontrollera *alla* kurvor. Gränsvärdesdefinitionen måste vara lättare att använda samtidigt som den täcker denna idé. Helst skall den också vara möjlig att formulera så att den gäller generellt för alla dimensioner. Nedanstående definition, där beteckningen $\bar{D} = D \cup \partial D$ står för mängden av alla punkter som ligger i D eller är randpunkter till D, uppfyller dessa krav.

Definition 1 (Gränsvärde) *Låt* $\mathbf{f}$ *vara en funktion från* $\mathbb{R}^n$ *till* $\mathbb{R}^m$ *och låt* $\mathbf{a} \in \bar{D}_\mathbf{f}$. $\mathbf{f}$ *sägs då ha gränsvärdet* $\mathbf{b}$ *då* $\mathbf{x}$ *går mot* $\mathbf{a}$ *om det till varje tal* $\epsilon > 0$ *finns ett tal* $\delta > 0$ *sådant att*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \epsilon \quad \textit{för alla } \mathbf{x} \in D_\mathbf{f} \textit{ sådana att } \quad |\mathbf{x}-\mathbf{a}| < \delta.$$

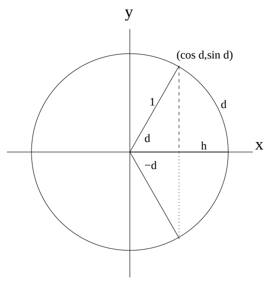
Detta skrivs

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{b} \quad \text{då} \quad \mathbf{x} \to \mathbf{a} \qquad \underline{\text{eller}} \qquad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Löst talat innebär $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ att $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ kan fås att ligga godtyckligt nära $\mathbf{b}$ om bara $\mathbf{x} \in D_\mathbf{f}$ ligger tillräckligt nära $\mathbf{a}$. Ju närmare $\mathbf{b}$ vi vill att $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ skall ligga, desto närmare $\mathbf{a}$ måste i allmänhet $\mathbf{x}$ ligga, m.a.o., talet $\delta = \delta(\epsilon)$ beror på ϵ och måste i allmänhet bli mindre när ϵ blir mindre.

Exempel 2: Vi visar att $\cos v$ har gränsvärdet 1 då v går mot 0.
Bevis: I beviset och figuren avstår vi från de grekiska bokstäverna av praktiska skäl och byter ut ϵ mot h och δ mot d. Vi skall alltså visa att till varje positivt tal h finns ett positivt tal d så att $|\cos v - 1| < h$ för alla vinklar v sådana att $0 < |v - 0| < d$.

Låt alltså h vara ett positivt tal. Då finns en vinkel d så att $\cos d = 1 - h$.
För alla vinklar v mellan $-d$ och d är $\cos v > \cos d$.
Alltså: om $|v| < d$ så gäller det att $1 - h < \cos v \leq 1$.
Subtrahera 1 från varje led av olikheten ovan. Då erhålls $-h < \cos v - 1 \leq 0$.



Med andra ord: Till varje positivt tal h finns ett positivt tal d så att för alla v sådana att $0 < |v - 0| < d$ gäller det att $|\cos v - 1| < h$. Detta visar att kravet i definitionen är uppfyllt. $\square$

Vi skall snart se att gränsvärdet för en vektorvärd funktion beräknas komponentvis och därför skall vi här koncentrera oss på gränsvärden för reellvärda funktioner. Dessutom, eftersom

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ [\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{a}] \ = \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{y} + \mathbf{a}),$$

räcker det, för förståelsen av gränsvärdesbegreppet, att vi studerar gränsvärden då $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$. Av definitionen följer att det är samma sak att $f(\mathbf{x})$ har gränsvärdet b som att $f(\mathbf{x}) - b$ har gränsvärdet 0. När vi undersöker eventuellt gränsvärde skall vi därför

1. Gissa det eventuella gränsvärdet b.
2. Visa att $f(\mathbf{x}) - b$ går mot 0.

Exempel 3: Undersök

$$f(x, y) = \frac{x^2 + x^2y^2 + y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{då} \quad (x, y) \to (0, 0).$$

f är definierad för alla punkter (x, y) utom origo.
Antag att gränsvärde finns, och kalla det b. Eftersom

$$f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{då} \quad x \neq 0$$

och $(x, 0)$ ligger nära $(0, 0)$ när x ligger nära 0, så inser vi att $b = 1$. (Här kunde vi lika gärna ha undersökt $f(0, y)$ eller $f(x, y(x))$ för någon kurva $y = y(x)$ där $y(0) = 0$, eller varför inte $f(x(y), y)$ om vi tycker att det hade passat bättre.)
Vår första slutsats är alltså att gränsvärdet, om det existerar, måste vara 1.

Vi undersöker nu

$$f(x,y) - b = \frac{x^2 + x^2y^2 + y^2}{x^2+y^2} - 1 = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

och skall visa att till varje $\epsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att om $(x,y) \in D_f$ och $|(x,y)-(0,0)| < \delta$, så gäller $|f(x,y)-1| < \epsilon$. Vi använder olikheterna

$$\begin{aligned} |x| &\leq \sqrt{x^2+y^2}, \\ |y| &\leq \sqrt{x^2+y^2}, \end{aligned}$$

och får

$$|f(x,y)-1| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2, \tag{1}$$

vilket blir mindre än ϵ om bara $|(x,y)-0| = \sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{\epsilon}$. Gränsvärdesdefinitionens δ kan tydligen väljas som $\sqrt{\epsilon}$ (eller som vilket positivt tal som helst som är mindre än $\sqrt{\epsilon}$).
Vi har alltså visat att $f(x,y) \to 1$ då $(x,y) \to (0,0)$. $\square$

Hur kan det se ut när gränsvärde saknas?

Exempel 4: Undersök

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2 + \sin^2 x}{x^2+y^2} \quad \text{då} \quad (x,y) \to (0,0).$$

Som i föregående exempel består D_f av alla punkter utom origo.
Här ser vi att $f(x,0) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to 1$ då $x \to 0$ men att $f(0,y) = 0/y^2 = 0 \to 0$ då $y \to 0$. Tydligen måste det eventuella gränsvärdet vara både 1 och 0, vilket inte är möjligt, eftersom det inte kan finnas mer än ett gränsvärde.
Slutsats: gränsvärde saknas. $\square$

Denna metod att visa att gränsvärde saknas är mycket viktig. Ibland behövs emellertid lite mer fantasi.

Exempel 5: Undersök

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{då} \quad (x,y) \to (0,0).$$

Återigen är $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
$f(x,0) = 0 \to 0$ då $x \to 0$ och $f(0,y) = 0 \to 0$ då $y \to 0$, så då misstänker man kanske att gränsvärdet är 0. Men $f(x,x) = 1/2 \to 1/2$ då $x \to 0$.
Slutsats: gränsvärde saknas. $\square$

Anmärkning : Lägg noga märke till att man genom olika ansatser av typen $y = y(x)$ endast kan bevisa att gränsvärde <u>saknas</u>. Man kan <u>inte</u> bevisa existens av gränsvärde genom ansats. Däremot kan man som i exempel 2 gissa vad gränsvärdet är. $\square$

Exempel 6: Undersök

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x-y} \quad \text{då} \quad (x,y) \to (0,0).$$

Här består D_f av alla punkter utanför linjen $y = x$, och denna linje går genom $(0,0)$. $f(x,0) = x$, så eventuellt gränsvärde är 0. Men om $x = x_0 \neq 0$ är fixt och vi låter $(x,y) = (x_0, y)$ närma sig linjen $y = x$, så går täljaren mot $2x_0^2$ medan nämnaren går mot 0, vilket innebär att $|f(x,y)|$ blir obegränsat stor. Detta resonemang kan genomföras för godtyckligt små x_0, så $f(x,y)$ kan inte vara nära 0 för alla $(x,y) \in D_f$ nära $(0,0)$.
Slutsats: gränsvärde saknas.
Man kan i detta exempel visa att gränsvärde saknas med **"smygmetoden"**: sätt

$$x - y = h(x),$$

där $h(x)$ skall väljas smart så att $x - y \to 0$ på ett bra sätt då $x \to 0$. Vi får

$$f(x, x-h(x)) = \frac{x^2 + (x-h(x))^2}{x-(x-h(x))} = \frac{2x^2 - 2xh(x) + h^2(x)}{h(x)}.$$

Om vi här väljer $h(x) = x^2$, så $(x, x-x^2) \in D_f$ för $x \neq 0$, $(x, x-x^2) \to (0,0)$ då $x \to 0$, och $f(x, x-x^2) \to 2$ då $x \to 0$. Men samtidigt gäller $f(x,0) \to 0$ då $x \to 0$, så gränsvärde saknas. □

Räkneregler för gränsvärden

Ytterst sällan behöver man gå till definitionen vid beräkning av gränsvärden. Man utnyttjar istället räkneregler som underlättar kalkylerna väsentligt. Vi skall här ge de viktigaste av dessa regler. För att underlätta formuleringarna utgår vi ifrån att alla inblandade funktioner har samma definitionsmängd D och därmed att punkten där gränsvärdet beräknas tillhör $\bar{D}$.

Sats 1 (Summa) *Om* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *och* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$*, så gäller*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Bevis: Låt $\epsilon > 0$ vara ett godtyckligt (litet) tal. Vi skall visa att det finns ett tal $\delta > 0$ sådant att

$$|(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})) - (\mathbf{b} + \mathbf{c})| < \epsilon \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in D \text{ sådana att} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta.$$

Eftersom $\mathbf{f}$ och $\mathbf{g}$ har gränsvärden då $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, finns för talet $\epsilon/2$ tal $\delta_f > 0$ och $\delta_g > 0$ sådana att

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \epsilon/2 \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in D \text{ sådana att} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta_f$$

och

$$|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}| < \epsilon/2 \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in D \text{ sådana att} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta_g.$$

Om δ är det minsta av talen δ_f och δ_g, så är $\delta > 0$, och om $\mathbf{x} \in D$ och $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$, så ger triangelolikheten

$$\begin{aligned} |(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})) - (\mathbf{b} + \mathbf{c})| &= |(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}) + (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{c})| \\ &\leq |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| + |\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon, \end{aligned}$$

vilket visar påståendet. □

Sats 2 (Instängningsregeln) *Om f, g och h är reellvärda funktioner,*

$$f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x}), \tag{2}$$

och $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x})$*, så gäller också* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = b$.

Bevis: Låt $\epsilon > 0$ vara ett godtyckligt (litet) tal. Vi skall visa att det finns ett tal $\delta > 0$ sådant att $|g(\mathbf{x}) - b| < \epsilon$ närhelst $\mathbf{x} \in D$ och $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$.
Eftersom f och h har gränsvärden, finns det ett tal $\delta > 0$ sådant $|f(\mathbf{x}) - b| < \epsilon$ och $|h(\mathbf{x}) - b| < \epsilon$ närhelst $x \in D$ och $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ (man väljer $\delta = \min\{\delta_f, \delta_h\}$ precis som i föregående bevis). Men då gäller ju speciellt

$$-\epsilon < f(\mathbf{x}) - b \leq g(\mathbf{x}) - b \leq h(\mathbf{x}) - b < \epsilon,$$

där andra och tredje olikheterna följer av olikheterna

□

Sats 3 (Komponentvisa gränsvärden) *Om*

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

är en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, så gäller

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Bevis: Beviset bygger på olikheterna

$$0 \leq |y_i| \leq |\mathbf{y}| \leq |y_1| + |y_2| + \ldots + |y_m|, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

där $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Av dessa följer nämligen, för $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$0 \leq |f_i(\mathbf{x}) - b_i| \leq |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| \leq |f_1(\mathbf{x}) - b_1| + |f_2(\mathbf{x}) - b_2| + \ldots + |f_m(\mathbf{x}) - b_m|.$$

Om $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{b}$, så följer av instängningsregeln använd på de två vänstra olikheterna att även $f_i(\mathbf{x}) \to b_i$ för alla i. Omvänt, om $f_i(\mathbf{x}) \to b_i$ för alla i, så ger att den ändliga summan $|f_1(\mathbf{x}) - b_1| + |f_2(\mathbf{x}) - b_2| + \ldots + |f_m(\mathbf{x}) - b_m| \to 0$, så instängningsregeln använd på de två högra olikheterna ger $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{b}$. □

Med ovanstående satser är det förhållandevis lätt att visa övriga gränsvärdesregler, som vi ger utan bevis.

Sats 4 (Begränsad funktion) *Om $f(\mathbf{x})$ och $g(\mathbf{x})$ är reellvärda funktioner sådana att $f(\mathbf{x})$ är begränsad på D och $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = 0$, så gäller $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0$.*

Sats 5 (Skalär gånger vektor) *Om $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b$ och $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$, så gäller*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) = b\mathbf{c}$$

och, om $b \neq 0$,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{1}{f(\mathbf{x})}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{1}{b}\mathbf{c}.$$

Sats 6 (Skalär- och vektorprodukt) *Om $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ och $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$, så gäller $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ och, i tre dimensioner, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \times \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.*

Sats 7 (Sammansatta funktioner) *Om $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ och $\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}} \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{c}$, så gäller $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{c}$.*

Anmärkning till exempel 3. Vi kan använda instängningsregeln på sambandet (**??**): när $(x, y) \to (0, 0)$, så gäller $x^2 + y^2 \to 0$, vilket direkt ger oss $|f(x, y) - 1| \to 0$, d.v.s. $f(x, y) \to 1$. □

Polära koordinater

Ibland lönar det sig att gå över till polära koordinater; exempelvis fungerar det väl i exempel 3, där ju $x^2 + y^2 = r^2 \to 0$ då $r \to 0$. Det är viktigt att det sista uttrycket är vinkeloberoende (θ-fritt).

Anmärkning till exempel 5. Polära koordinater ger

$$f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^2} = \frac{\sin 2\theta}{2},$$

så $f(x, y)$ antar alla värden i intervallet $[-1/2, 1/2]$ på varje omgivning till $(0, 0)$, vilket innebär att gränsvärde saknas. □

Exempel 7: Undersök

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2\sin(x/y)}{x^2+y^2} \quad \text{då} \quad (x,y) \to (0,0).$$

f är definierad utom då $y = 0$. Eftersom $f(0,y) \to 0$ då $y \to 0$, är det enda möjliga gränsvärdet 0.
Eftersom $|\sin t| \leq 1$ och $|\cos t| \leq 1$ för alla (reella) t, får vi med polära koordinater

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2y^2\sin(x/y)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2} \leq r^2,$$

och eftersom $r \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$, följer med instängningsregeln att $f(x,y) \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$. $\square$