

Kompletterande övningsuppgifter i flervariabelanalys

1. Bestäm en omgivning av punkten $(1, 2)$ som innehåller punkten $(1.05, 2.03)$ men som inte innehåller punkten $(1.1, 2)$. Skissa omgivningen tillsammans med alla de angivna punkterna.
2. Låt $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}$ och låt $P = (x, y, z)$ vara en godtycklig punkt i Ω . Avgör för vilka ϵ som $B_\epsilon(P)$ helt ligger i området Ω .
3. Visa att varje omgivning av punkten $(1, 0, 0, 1)$ innehåller minst en punkt från mängden $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 > x_4\}$
4. Avgör om punkten $(1, 1, 1)$ är en inre, yttre eller randpunkt till följande områden i $\mathbb{R}^3$ (tolka områdena geometriskt och förstå hur punkten $(1, 1, 1)$ förhåller sig till dem).
 - a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$
 - b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < z\}$
 - c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq z\}$
 - d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$
 - e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y < z + 1\}$
 - f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < y + 1 < z + 2\}$
5. Parametrisera på två olika sätt den kurva som följer ellipsen $x^2 + 4y^2 = 9$ i första kvadranten från $(3, 0)$ till $(1, \sqrt{2})$.
6. Grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$, $-2 \leq x \leq 2$, beskriver en funktionskurva i planet. Skissa kurvan och bestäm två olika parametriseringar av kurvan.
7. Bestäm en integral som ger längden av kurvan i uppgift 5 ovan och beräkna den med hjälp av Matlab.
8. Följande parametriseringar beskriver olika kurvor i planet. Skissa dem och markera den orientering som följer med resp parametrisering. Vilka beskriver enkla slutna kurvor?
 - a) $\mathbf{r} = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$, $-\pi/2 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$
 - b) $\mathbf{r} = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$, $-1 \leq t \leq 1$
 - c) $\mathbf{r} = t^2 \mathbf{i} + t(1 - t^2) \mathbf{j}$, $-1 \leq t \leq 1$
 - d) $\mathbf{r} = t^2 \mathbf{i} + t^4 \mathbf{j}$, $-1 \leq t \leq 1$
9. Bestäm normallinjen till den nivåkurva till funktionen $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ som går genom punkten $(1, 2)$
10. Bestäm normallinjen till den nivåyta till funktionen $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z^2 x$ som går genom punkten $(1, -1, 1)$

11. Avgör vilka av följande punkter som är kritiska resp singulära till funktionen $f(x, y) = x|y| - x$

a) $(1, 1)$

c) $(0, 1)$

b) $(1, 0)$

d) $(0, 0)$

12. Avgör vilka av följande funktioner som är kontinuerliga på $\mathbb{R}^2$

a) $f(x, y) = \begin{cases} xy & , \text{ då } (x, y) \neq (1, 1) \\ 1 & , \text{ då } (x, y) = (1, 1) \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy & , \text{ då } x \neq y \\ 0 & , \text{ då } x = y \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \sin y & , \text{ då } (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & , \text{ då } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$

d) $f(x, y) = \begin{cases} xy & , \text{ då } x \neq y \\ x^2 & , \text{ då } x = y \end{cases}$

13. Beräkna $\iint_S xz \, dS$ då S är den del av planet $z = 5 + 2x - 2y$ där $0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$

14. Beräkna arean av den del av ytan $z = xy$ där $x^2 + y^2 \leq 8, x \geq 0, y \geq 0$

15. Beräkna $\iint_S y^2 z \, dS$ då S är ytan som ges av parametriseringen

$$\mathbf{r} = u^2 \mathbf{i} + v \mathbf{j} + u \mathbf{k} \text{ där } 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

16. Beräkna $\iint_S (x^2 + y^2)z \, dS$ då S är den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ där $z \geq 0$

Svar

- 1.** Alla omgivningar $B_\epsilon(1, 2)$ sådana att $\sqrt{0.0034} < \epsilon \leq 0.1$ duger t.ex. $B_{0.1}(1, 2)$
- 2.** $\epsilon \leq -z$
- 3.** Antag att $B_\epsilon(P)$ är en omgivning av $P = (1, 0, 0, 1)$. Då ligger punkten $(1 + \frac{\epsilon}{2}, 0, 0, 1)$ i mängden $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 > x_4\}$ och är samtidigt en punkt i $B_\epsilon(\bar{P})$.
- 4.**

a) randpunkt	d) randpunkt
b) randpunkt	e) randpunkt
c) randpunkt	f) inre punkt

5. Två naturliga parametriseringar är;

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = \frac{3}{2} \sin t \end{cases}, \quad 0 \xrightarrow{t} \arccos \frac{1}{3} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} \sqrt{9 - t^2} \end{cases}, \quad 3 \xrightarrow{t} 1$$

Det finns dock oändligt många andra sätt att parametrisera kurvan.

6. Kurvan är den övre delen av ellipsen med centrum i $(0, 0)$ och halvaxlarna 2 (i x -riktning) respektive $\sqrt{8}$ (i y -riktning). Två naturliga parametriseringar är;

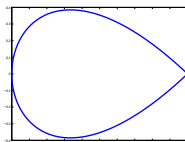
$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sqrt{8} \sin t \end{cases}, \quad 0 \xrightarrow{t} \pi \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{8 - 2x^2} \end{cases}, \quad -2 \xrightarrow{t} 2$$

Men som sagt det finns (som alltid) oändligt många sätt att parametrisera kurvan. Notera att ovanstående parametriseringar ger olika orientering (genomlöpstiktning) av kurvan.

7. Med parametriseringarna från svaret till uppgift 5 så får vi;

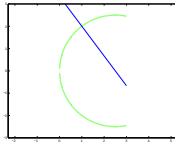
$$\int_1^3 \sqrt{1 + \frac{t^2}{4(9-t^2)}} dt \approx 2.63 \quad \text{respektive} \quad \int_0^{\arccos \frac{1}{3}} \sqrt{9 \sin^2(t) + \frac{9}{4} \cos^2(t)} dt \approx 2.63$$

8.
 - a) enkel sluten kurva. Kurvan är cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ som genomlöps precis ett varv med start och början i $(-1, 0)$.
 - b) enkel men ej sluten kurva. Kurvan är parabelbågen $y = x^2$ från $(-1, 1)$ till $(1, 1)$.
 - c) enkel sluten kurva ty $\mathbf{r}(-1) = \mathbf{i} = \mathbf{r}(1)$ och man ser lätt att $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_1) \Rightarrow t_0 = t_1$. Kurvan börjar i punkten $(1, 0)$ och går längs en båge i första kvadranten till origo (där $t = 0$). Sedan fortsätter kurvan i fjärde kvadranten längs en båge tillbaks till $(1, 0)$.

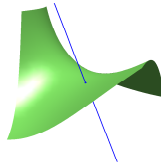


- d) sluten men ej enkel. Kurvan är parabelbågen $y = x^2$ från $(1, 1)$ till $(0, 0)$ och sedan tillbaka igen.

9. $4x + 3y = 10$



10. $1 - x = -y - 1 = \frac{1}{3}(z - 1)$



11. a) ej kritisk och ej singulär punkt c) kritisk men ej singulär punkt
 b) singulär men ej kritisk punkt d) ej kritisk och ej singulär punkt

12. a) kontinuerlig c) kontinuerlig
 b) ej kontinuerlig d) kontinuerlig

13. 44

14. $13\pi/3$

15. $\frac{1}{36}(5^{3/2} - 1)$

16. 16π