Lösningsförslag till deltentamen godkäntdelen, del 1

MVE085 Flervariabelanalys V2

2011-09-22 kl. 8:30-11:30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anders Martinsson, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

Tentamen på kursen består av tre delar; del 1 och del 2 av godkäntdelen samt överbetygsdelen. Denna deltenta täcker endast den första av dessa tre delar. För godkänt på tentamen som helhet krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas i samband med undervisningen senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Godkäntdelen, del 1

se uppgift 1:abc och 2 på nästa blad

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 12/13

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2011-09-22	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående deluppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm $\dfrac{\partial}{\partial s} f(x,y)$, då $x = s^2 + 1$ och $y = 3s + 1$. (2p)

Svar: $\dfrac{\partial}{\partial s} f(x,y) = 2sf_1(s^2+1, 3s+1) + 3f_2(s^2+1, 3s+1)$

(b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $z^3+xz+y = 2$ i punkten $(2,-1,1)$. (3p)

Lösning: Gradienten av $f(x,y,z) = z^3 + xz + y$ är $\nabla f(x,y,z) = z\mathbf{i} + \mathbf{j} + (3z^2 + x)\mathbf{k}$. Speciellt får vi att $\nabla f(2,-1,1) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, så en ekvation för tangentplanet är;

$$(x-2) + (y+1) + 5(z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y + 5z = 6$$

Svar: $x + y + 5z = 6$

(c) Bestäm en parametrisering av den del av cirkeln $x^2 + y^2 = 5$ som ligger i första kvadranten. Antag att din parametrisering beskriver rörelsen hos en partikel. Vad är då partikelns fart i punkten $(1,2)$? (3p)

Lösning: En naturlig parametrisering av cirkelbågen är t.ex. $\mathbf{r} = \sqrt{5}\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{5}\sin t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Med denna parametrisering blir hastigheten $\mathbf{r}'(t) = -\sqrt{5}\sin t\mathbf{i} + \sqrt{5}\cos t\mathbf{j}$ och farten $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\sqrt{5}\sin t)^2 + (\sqrt{5}\cos t)^2} = \sqrt{5\sin^2 t + 5\cos^2 t} = \sqrt{5}$. Så partikelns fart utefter kurvan är i så fall konstant $\sqrt{5}$.

Svar: T.ex. ger parametriseringen $\mathbf{r} = \sqrt{5}\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{5}\sin t\,\mathbf{j}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, farten $\sqrt{5}$ (längdenheter per tidsenhet) i punkten $(1,2)$ (och i alla andra punkter på kurvan).

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x,y) = 2x^4 - 2y^2 - x$ på det område som begränsas av kurvorna $y = x^2 - 1$ och $y = 1 - x^2$. (6p)

Lösning: Eftersom funktionen f saknar singulariteter måste extremvärdena antas i kritiska punkter i det inre av området eller i punkter på randen av området.

Vi har $\nabla f(x,y) = (8x^3 - 1)\mathbf{i} - 4y\mathbf{j} = \mathbf{0}$ så den enda kritiska punkten är $(\frac{1}{2}, 0)$. Denna punkt ligger inuti det angivna området och vi har $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{3}{8}$.

Vi undersöker sedan de två randbitarna;

$$R_1 : y = x^2 - 1,\ -1 \le x \le 1 \quad \text{och} \quad R_2 : y = 1 - x^2,\ -1 \le x \le 1.$$

På R_1 studerar vi $g_1(x) = f(x, x^2-1) = 2x^4 - 2(x^2-1)^2 - x = 4x^2 - x - 2$. Eftersom $g_1'(x) = 8x - 1$ så är $x = \frac{1}{8}$ den enda kritiska punkten till g_1. Denna punkt ligger i intervallet $-1 \le x \le 1$ och vi har $g_1(\frac{1}{8}) = -\frac{33}{16}$. Eftersom $f(x, x^2-1) = f(x, 1-x^2)$ så kommer vi få samma extremvärde på R_2 som vi fick på R_1.

Avslutningsvis måste vi också kontrollera funktionsvärdena i ”hörnpunkterna” $(-1,0)$ och $(1,0)$ av området. Vi har $f(-1,0) = 3$ och $f(1,0) = 1$. Dessa värden skall slutligen jämföras med ovan erhållna ”kandidater” dvs $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{3}{8}$ och $f(\frac{1}{8}, \pm\frac{63}{64}) = -\frac{33}{16}$. Av dessa fyra värden är 3 störst och $-\frac{33}{16}$ minst.

Svar: Funktionens största värde på det angivna området är 3 och det minsta är $-\frac{33}{16}$.