Jack Jönsson
2014-10-23

Sammanfattning flervariabeln!

- En mängd V i planet kallas öppen om det till varje punkt $(a,b) \in V$ finns en omgivning $B_r(a,b)$ som ligger helt i V.

- En mängd F kallas sluten om komplementet till F är en öppen mängd.

- Då $r = r(t)$ beskriver en partikelbana kallas $v(t) = \frac{d}{dt} r(t)$ för partikelns hastighet.

  $|v(t)|$ = partikelns fart och $\frac{d}{dt}(v(t))$ dess acceleration.

Exempel

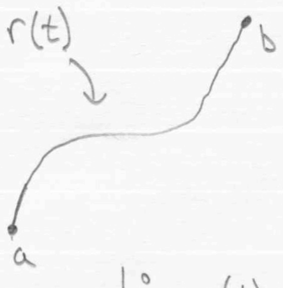
$r(t) = (\cos t, \sin t, t)$

$v(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ (riktningsvektor)

$|v(t)| = \sqrt{(-\sin^2 t)^2 + \cos^2 t + 1^2} = \sqrt{2}$ (farten konstant i detta ex)

$a = (-\cos t, -\sin t, 0)$

- Kurvlängd:



$$s = \int_{t=a}^{t=b} |v|\, dt = \int_a^b |r'(t)|\, dt$$ (fungerar pss i rymden)

då $r(t)$ är en parametrisering av kurvan.

OBS! kurvlängden mellan a & b beror ej på val av parametrisering.

- Partiella derivator:
Mått på hur $f(x,y)$ ökar om jag bara ökar (lite) på x (eller y).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12}$$

- Om jag ska partiellderivera en funktion e^{xy}, $x = s^2 t$, $y = (\sin s)t^2$ kan det underlätta att sätta in $s^2 t$ och $(\sin s)t^2$ i e^{xy}.

- Med partiella derivator kan vi ge ekvationer för tangentplan.

- Normalen till tangentplanet av en funktionsyta, $z = f(x,y)$ ges av $(f_1, f_2, -1)$ och går genom $(a, b, f(a,b))$.

Detta ger tangentplanets ekvation:

$$f_1(x-a) + f_2(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$$

- Kedjeregeln:

$$f(u(s,t), v(s,t))$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} = f_1 \frac{\partial u}{\partial s} + f_2 \frac{\partial v}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = f_1 \frac{\partial u}{\partial t} + f_2 \frac{\partial v}{\partial t}$$

- $\nabla f(a,b) = (f_1(a,b), f_2(a,b))$ är gradienten till f i punkten (a,b)

- I en punkt (a,b) är $\nabla f(a,b)$ en normal till nivåkurvan. ∇f ger den riktning som $f(x,y)$ ökar mest i. $u \cdot \nabla f(a,b) =$ ökningen i riktningen u.

- Andra ordningens Taylorapproximation:, $f(x,y) \approx$

$$P_2(x,y) = f + f_1(x-a) + f_2(y-b) + \frac{1}{2}\left(f_{11}(x-a)^2 + 2f_{12}(x-a)(y-b) + f_{22}(y-b)^2\right)$$

- Kritiska punkter i de (x,y) som uppfyller $f_1 = 0$, $f_2 = 0$

$f_{11} = A$, $f_{12} = B$, $f_{22} = C$

- $B^2 - AC < 0$, $A > 0$ minpunkt
- $B^2 - AC < 0$, $A < 0$ maxpunkt
- $B^2 - AC > 0$ sadelpunkt
- $B^2 - AC = 0$ ger ingen info

- Om man letar efter extremvärden till $f(x,y)$ över ett område får man även kolla på randen till detta område. Kolla även hörnpunkter.

- Lagranges metod:

$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, där $g(x,y)$ är den funktion som begränsar.

$\uparrow$ bivillkoret

Metoden är även användbar för funktioner i tre variabler

• Jacobi-matris:

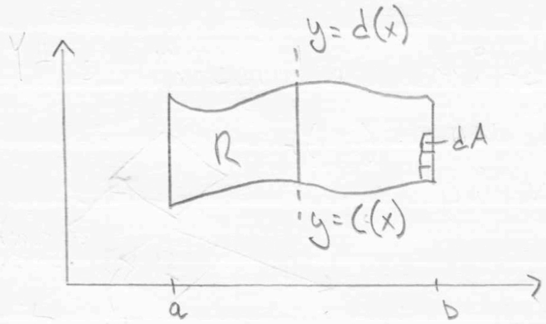
$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \\ \nabla F_3 \end{bmatrix}$$

• Om vi har ett vektorfält $F = F(x,y,z)$ och en punkt (x_0, y_0, z_0) kan vi hitta approximativa värde i närliggande punkter med hjälp av Jacobimatrisen i punkten (x_0, y_0, z_0).

$$\underbrace{F(x,y,z)}_{\text{värden nära } x_0, y_0, z_0} = \begin{bmatrix} F_1(x_0,y_0,z_0) \\ F_2(x_0,y_0,z_0) \\ F_3(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix} + DF(x_0,y_0,z_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$

- En dubbelintegral kan tolkas som volymen av en kropp.

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \text{volymen mellan två areor.}$$



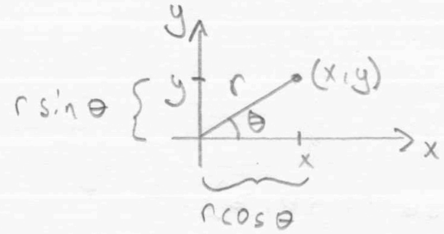
Yttre integralen måste alltid ha konstanta värden.

$$\iint_R \underbrace{f(x,y)\,dA} = \int_a \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Tänk att f(x,y) är en funktionsyta som ligger ovanför R. Då känns det rimligt att ta dA, som är en liten area på R, och multiplicera den med höjden som är funktionsvärdet för att få volymen. Det som sker i HL är att man först får en area mellan R och f(x,y) osh sen summerar man alla areor för att få volymen.

- Polära koordinater.

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$



Tänk på två saker vid byte till polära koordinater:

1) Ändra gränser
2) dxdy måste bytas ut mot rdrdθ

glöm inte att det ska vara beloppet

- $dxdy = \left|\underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\right| dudv$

determinanten av Jacobimatrisen för $u = u(x,y)$
$v = v(x,y)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

- Trippelintegraler:

om $f \geq 0$

$$\iiint_R \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{densitet}} \underbrace{dV}_{\text{volymelement}} = \text{massa av objektet } R$$

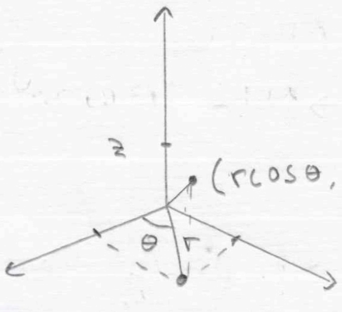
(kan även vara laddning osv)

Om densiteten är 1 är volymen=massan

$$\iiint_R dV = \text{volymen av } R = \text{massan av } R$$

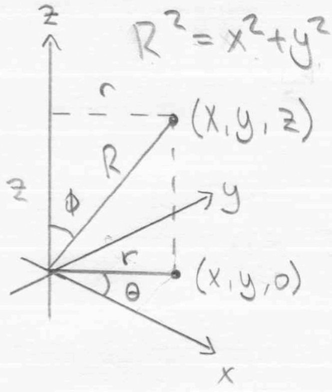
- Cylindriska koordinater är väldigt likt polära koordinater fast i 3.dim.

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = z$



$dV = dxdydz = r\,dr\,d\theta\,dz$

• Sfäriska koordinater är bra för att beskriva punkter på en sfär.



$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = R\cos\phi \\ r = R\sin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos\phi\sin\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\phi \end{cases}$$

$$\tan\phi = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(R,\theta,\phi)} = R^2\sin\phi \Rightarrow dV = dx\,dy\,dz = R^2\sin\phi\, dR\, d\phi\, d\theta$$

• Sfäriska koordinater passar bra för glasstrut och sfär.

• Cylindriska passar bra för ägg.

• Ett vektorfält $F(x,y,z) = F_1(x,y,z)i + F_2(x,y,z)j + F_3(x,y,z)k$ har fältlinjer som uppfyller: $r'(t) = \lambda(t)F(r(t))$

$$\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}$$ (diff.ekv som går att lösa med integrering.)

• Ett vektorfält är konservativt om: $F = \nabla\phi$, och då gäller

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

• eller $\text{curl}\, F = 0$

- Konservativa vektorfält kan skrivas på formen $\nabla\phi = F\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$ för någon funktion ϕ.

  ϕ = potential till F. $\quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial\phi}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial\phi}{\partial z} = F_3$

  ϕ är <u>inte</u> unik

- En "primitiv funktion" till ett vektorfält <u>är</u> en potential ϕ

- Om vektorfältet är konservativt:

$$\int F_1\,dx$$

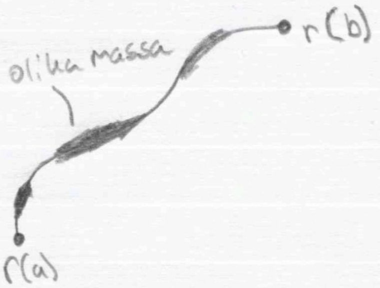
$$\int F_2\,dy \qquad \phi = \text{ta med allt } \underline{\underline{1}} \text{ gång.}$$

$$\int F_3\,dz$$

- Nivåkurvorna $\phi = C$ kallas ekvipotentialkurvor till F.

- Med kurvintegralen av $f(x,y,z)$ över (eller längs) kurvan $\mathcal{C}$ menas integralen:

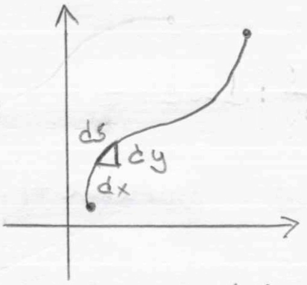
$$\int_{\mathcal{C}} \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{en typ av densitet}}\,\underbrace{ds}_{\text{längdelement}} = \int_a^b f(r(t)) \cdot \left|\frac{dr}{dt}\right| dt = \text{massan av "kedjan"}$$



om densiteten = 1 får vi:

$$\int_a^b 1 \cdot \left|\frac{dr}{dt}\right| dt = \underbrace{\int_a^b |r'(t)|\,dt = \text{längden}}_{\text{samma som på sida 1}}$$

• Varför $\left|\frac{dr}{dt}\right| dt = ds$?



en liten skillnad i x och y led ger en liten skillnad ds på kurvan.

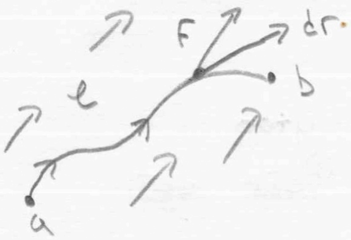
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = [\text{lägger till } dt] =$$

$\left(\begin{array}{l}\text{finns en parametrisering} \\ r=(x(t),y(t))\end{array}\right) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \left|\frac{dr}{dt}\right| dt$

• Kurvintegral av vektorfält:

"Arbetet som utförs på en partikel när den rör sig längs en kurva i ett vektorfält". (Newton: arbete=Fs)

$$\int_C F\cdot dr = \int_a^b (F_1, F_2, F_3)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) dt = \int_a^b \left(F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\frac{dz}{dt}\right) dt$$



känns rimligt att ta skalärprodukten av F och dr för att få arbetet som vektorfältet utför längs dr.

$$\oint_C F\cdot dr$$

ringen betyder bara att kurvan är sluten.
man vill alltså veta hur mycket arbete som utförs på partikeln om om den går ett helt varv.

• Arbetet som utförs på ett konservativt kraftfält där potential existerar.

$$\int_C F\cdot dr = \Phi_{slutpunkt} - \Phi_{startpunkt}$$

- Konservativa fallet: oberoende av bana
  Icke konservativa fallet: beroende av bana

- Ytintegraler: $\iint_S f\,dS = \iint_R f(r(u,v))\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| du\,dv =$
  $= \iint_R f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| du\,dv$ för en parametriserad yta $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

dS = ytareaelement

$$\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}$$

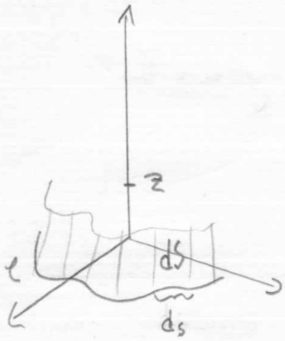
Ovanstående funkar för alla parametriserade ytor i rummet (en sfär, en kon, ett "moln" osv). Alltså där det för varje (x,y) kan finnas ett eller flera z.

- Specialfall är det lättare:

Funktionsyta $z = f(x,y)$, $r(x,y) = (x, y, \overbrace{f(x,y)}^{z})$

$\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = (-f_1, -f_2, 1)$, $dS = \sqrt{(f_1)^2 + (f_2)^2 + 1}\,dx\,dy$

• Ytor som går längs kurvor i xy-planet:



arean av "staketet" $= \int_\ell dS = \int_\ell z\,ds$

arean av en bit $= dS =$ basen $\cdot$ höjden $= z \cdot ds$

"ett staket på kurvan ℓ med höjden z !!

• Geometriskt trix:

Om z är <u>unikt</u> bestämt av x & y (tex funktionsyta $z = f(x, y)$ (men inte en sfär)

$$dS = \frac{|n|}{|n \cdot k|}\,dx\,dy \quad , \text{där } k = (0,0,1)$$

n är en normalvektor till tangentplanet.

Speciellt om S ges av en ekvation:

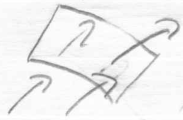
nivåyta $G(x,y,z) = 0$

Vet att gradienten $n = \nabla G$ är normal till $G = 0$ i en punkt $(x,y,z) = P$ s.a $G(P) = 0$

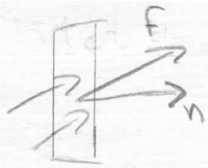
$$dS = \frac{|n|}{|n \cdot k|}\,dx\,dy = \frac{|\nabla G|}{|\nabla G \cdot k|}\,dx\,dy = \frac{|\nabla G|}{|G_3|}\,dx\,dy$$

↑ k komponenten

• Flödesintegraler



Hur mycket flödar genom ytan?



skalärprodukt

$$\text{Flödet} = \underbrace{F \bullet n}_{} \cdot \text{arean}$$

om vektorfältet kommer "snett" in måste jag ta reda på hur mycket som går i samma riktning som normalen till ytan.

$$\text{Flödet} = \iint_S F \bullet \hat{N}\, dS$$

ytareaelement

normal riktning i olika punkter (denna har längd $\underline{\underline{1}}$)

vektorfält

$$\hat{N}\, dS = d\vec{S}$$

Om $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ är en parametrisering av ytan S får vi:

$$\boxed{\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iint_S F \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right) du\, dv}$$

• $\operatorname{div} F = \nabla \bullet F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

om $\operatorname{div} F = 0$ är vektorfältet källfritt

$\operatorname{div} F$ = utflöde − inflöde

• $\operatorname{curl} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$ curlF = rotation av vektorfältet

Om curlF = 0 är vektorfältet virvelfritt

• Div(curlF) är alltid noll.

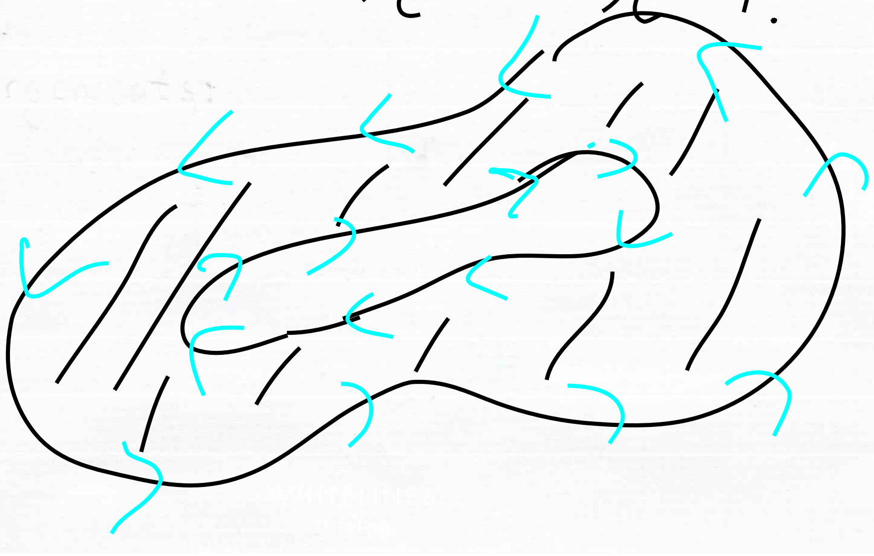
• Greens formel:

$$\oint_C F_1 dx + F_2 dy = \iint_R \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}_{\operatorname{curl} F \cdot k} dx\,dy$$

För att kunna tillämpa Greens formel måste området vara slutet och integreringen ske över randen moturs. / alternativt området ligger till vänster om kurvans riktning/orientering

• Area som kurvintegral

$$\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \text{Arean av } R = \oint_C x\,dy = \oint_C -y\,dx$$



• Gauss divergenssats:

Om R är ett 3-dim område i $\mathbb{R}^3$, med rand ∂R och F är ett vektorfält så är:

$$\underbrace{\iiint_R \operatorname{div} F \, dV}_{\text{summan av allt producerat flöde i alla punkter.}} = \iint_{\partial R} F \bullet \hat{N} \, dS = \underbrace{\iint_{\partial R} F \bullet d\vec{S}}_{\text{utflöde - inflöde}}$$

($\hat{N}$ pekar <u>ut</u> ur området R)

$$\text{summan} = \iiint \qquad \begin{array}{l}\text{producerat flöde} \\ \text{i en punkt}\end{array} = \operatorname{div} F$$

• Stokes sats:

$$\iint_{\text{ytan } R} \operatorname{curl} F \bullet \hat{N} \, dS = \int_{\partial R} F \bullet dr$$

(Specialfallet $z=0$ på ytan <u>är</u> Greens formel)