Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2012-10-25 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Adam Andersson, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Bestäm det kortaste avståndet mellan parablerna $y = x^2 + 1$ och $x = y^2 + 1$. (6p)

7. Bestäm fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{x} e^{y^2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{y} e^{x}\mathbf{j}$ (6p)

8. (a) Laplaceoperatorn Δ till en reellvärd funktion av tre variabler $f(x, y, z)$ är given av $\Delta f = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 + \partial^2 f/\partial z^2$. För ett vektorfält $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ gäller att $\Delta\mathbf{F} = \Delta F_1\mathbf{i} + \Delta F_2\mathbf{j} + \Delta F_3\mathbf{k}$. Visa att

$$\Delta\mathbf{F} = \nabla(\nabla\bullet\mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}).$$ (4p)

(b) Ange ett resultat som tolkar $\nabla\bullet\mathbf{F}$ som utflödesintensitet/källproduktion. (2p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 12/13

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2012-10-25	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt C vara den del av sinuskurvan $y = \sin x$, där $0 \leq x \leq 2\pi$ (dvs. en periodlängd). Ställ upp en integral som ger längden på kurvan C (obs! integralen behöver inte beräknas). (2p)

Lösning:

Svar ....

(b) Antag att f är en reellvärd funktion av tre variabler. Uttryck $\dfrac{\partial}{\partial t} f(st, 2s, 3t)$ i de partiella derivatorna av f. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm den riktning i vilket riktningsderivatan av funktionen $f(x, y) = x^3 + y^2$ i punkten $(1, 2)$ är som störst, samt ange detta största värde. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

(a) Funktionen f har tre kritiska punkter, varav en är $(1, 1)$. Bestäm de andra två. (3p)

(b) Bestäm karaktären hos alla de kritiska punkterna till funktionen f (dvs. avgör om de motsvarar lokala max, min eller sadelpunkter). (3p)

Anonym kod	**MVE085 Flervariabelanalys V2 2012-10-25**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt $\mathcal{S}$ vara den del av sfären $x^2+y^2+z^2=5$ som ligger ovanför konen $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Beräkna arean av $\mathcal{S}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Låt D vara det område i xy-planet där $x^2 \leq y \leq 1$. Förklara varför $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dA$ skall betraktas som en generaliserad integral och avgör om den är konvergent eller divergent. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Antag att ett kraftfält beskrivs av $\mathbf{F}=2xy\mathbf{i}+(x^2+2yz)\mathbf{j}+(y^2+1)\mathbf{k}$

(a) Beräkna $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$. (2p)

(b) Beräkna det arbete som $\mathbf{F}$ uträttar på en partikel som rör sig raka sträckan från $(1,-1,2)$ till $(0,2,1)$. (4p)

5. Låt Ω vara det område i rummet som begränsas av ytan $z=2-x^2-y^2$ och planet $z=1$. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}=2xy\mathbf{i}+(x^2+2yz)\mathbf{j}+(y^2+1)\mathbf{k}$ ut ur Ω. (6p)